عنوان

انواع مثلثات

فصل اول :

زوایای نقطه در فضا (خطی که از مبداء مختصات می‌گذرد) **(علم ریاضیات)**

فصل دوم :

زوایای خط در فضا (علم ریاضیات)

فصل سوم :

سرعت زاویه‌ای (علم ستاره شناسی)

مقدمه :

متافیزیک

۱- عضو هیچ حزب ، گروه و دسته سیاسی نمی‌باشم و اصولاً اهل سیاست نمی‌باشم. عضو کانون کارشناسان رسمی دادگستری استان اصفهان هستم و لذا با توجه به قسم نامه کارشناسی ، متعهد می‌باشم که فکر، کلام ، قلم من بر حق باشد . لذا از افتخارات من این است که کلیه تحقیقات علمی انجام شده و ادامه آن در جهت حق و حقیقت و در راستای خدمت به جهان بشریت می‌باشد.

۲- ارزش واقعی: جایگاه واقعی اینجانب در حال با توجه به تحقیقات علمی اثبات شده، معادل مرد شماره یک در پایان قرن بیست و یکم خواهد بود. این جایگاه از نظر ارزش علمی می‌باشد و در مقایس با ارزش‌های سایر رشته‌ها قابل مقایسه نمی‌باشد.

۳- دلایل ارزش واقعی: در ابتدای سایت علمی اینجانب (www.p3m.ir) آمده است .

فیثاغورث + نیوتن + انیشتین = مهبد

A:
انیشتین: اثبات بُعد چهارم
مهبد : اثبات بُعد پنجم

B:
نیوتن: اثبات معادلات دیفرانسیل
مهبد: اثبات معادلات دیفرانسیل به روش فیزیک، مکانیک و ریاضیات

C:
فیثاغورث: اثبات مثلثات مسطحه
مهبد: اثبات مثلثات دینامیک و انواع مثلثات

در کامپیوترهای رایج پارامترهایی موجود است که زبان کامپیوتر آنرا می‌فهمد و آنها عبارتند از اعدادی که برای y و x تعریف می‌شود (در صفحه oxy). در فضای ۳ بعدی (x,y,z) تعریف می‌شود اعدادی که برای (x,y,z) تعریف می‌شود و در نهایت براساس مثلثات $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ تعریف می‌گردد.

اینک برای دقت بیشتر می‌توان از انواع مثلثات اثبات شده استفاده نمود، بطوریکه هر نقطه در فضا با روابط انواع مثلثات از چند نوع مثلثات و چند زاویه تست و کنترل گردد. با توجه به کنترل از چند زاویه می‌توان در کامپیوترهای فوق مدرن جهت تست و کنترل الکترونها و ..... و در نهایت فیزیک کوانتوم استفاده نمود. با اثبات روابط مثلثاتی در انواع مثلثات ، تمرین‌هایی حل نموده‌ایم و بصورت واضح و ساده حل گردیده است و شایان ذکر است پایه و اساس ریاضیات جدید در کامپیوترهای فوق مدرن (انواع مثلثات) می‌باشد.

فصل اول :

زوایای نقطه در فضا (خطی که از مبداء مختصات می‌گذرد)

همانطور که از نام کتاب مشخص می باشد، موضوع اصلی ، انواع مثلثات می باشد و در ادامه به بررسی آن می پردازیم. در این راستا بایستی اول انواع زوایای نقطه در فضا را نسبت به محورهای مختصات معلوم نمائیم و سپس نسبت باثبات روابط زوایای مربوطه اقدام نمائیم.

با توجه به مختصات نقطه (A) در فضا، انواع زاویه را به شرح میباشد:

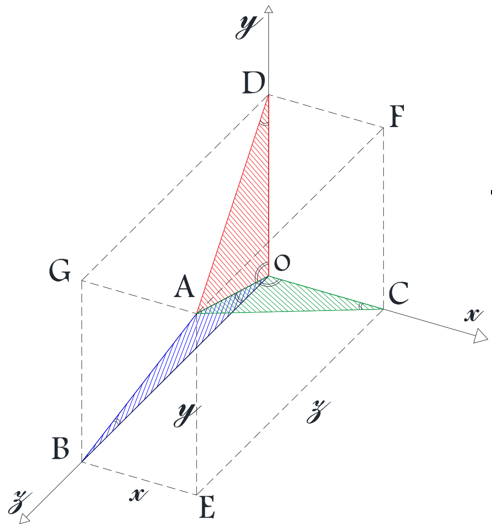
۱. زاویه نقطه در فضا نسبت به ۳ محور مختصات (ox,oy,oz)
   ۱,۱. زاویه نقطه نسبت به محور مختصات (ox) برابر است با (αx)
   ۱,۲. زاویه نقطه نسبت به محور مختصات (oy) برابر است با (αy)
   ۱,۳. زاویه نقطه نسبت به محور مختصات (oz) برابر است با (αz)
۲. زاویه نقطه در فضا نسبت به ۳ صفحه مختصات
   ۲,۱. زاویه نقطه نسبت به صفحه مختصات (oxy) برابر است با (αxy)
   ۲,۲. زاویه نقطه نسبت به صفحه مختصات (oxz) برابر است با (αxz)
   ۲,۳. زاویه نقطه نسبت به صفحه مختصات (oyz) برابر است با (αyz)

نقطه در فضا دارای ۳ تصویر در ۳ محور مختصات (oyz)،(oxz)،(oxy) می باشد. هر یک از نقاط دارای تصویری در صفحات مختصات می باشد و نسبت به محورهای مختصات دارای زاویه می باشند و به ترتیب می توان نوشت:

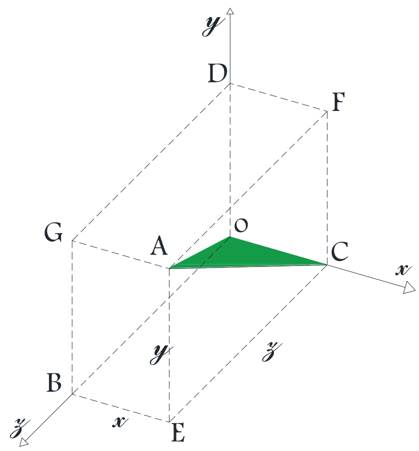
۳. زاویه نقطه در فضا نسبت به ۳ محور مختصات (ox,oy,oz)
   ۳,۱. زاویه نقطه تصویر نسبت به صفحه مختصات (oxy) برابر است با (β)
   ۳,۲. زاویه نقطه تصویر نسبت به صفحه مختصات (oxz) برابر است با (γ)
   ۳,۳. زاویه نقطه تصویر نسبت به صفحه مختصات (oyz) برابر است با (θ)

برای واضح بودن زوایا و قدرت تجسم کاربر، زوایای مربوطه در فضا نسبت به ۳ محور مختصات را در چند شکل نشان داده شده است و برای زوایای نقطه در فضا نسبت به ۳ صفحه مختصات را در چند شکل جداگانه نشان داده شده است و زوایای (θ) و (γ) و (β) نیازی به ارائه شکل نمی‌باشد.

برای ارائه و نشان دادن نقطه در فضا، تصاویر خطوط در صفحات را بصورت نقطه چین ارائه شده است (جهت قدرت تجسم فضایی آسان‌تر)

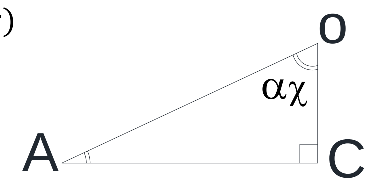


- در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{\mathrm{AoC}}$ زاویه $(\widehat{\mathrm{C}} = \frac{\pi}{2})$ می باشد.
- در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{\mathrm{AoD}}$ زاویه $(\widehat{\mathrm{D}} = \frac{\pi}{2})$ می باشد
- در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{\mathrm{AoB}}$ زاویه $(\widehat{\mathrm{B}} = \frac{\pi}{2})$ می باشد



در مثلث $\overset{\triangle}{\mathrm{AoC}}$ داریم

$\widehat{\mathrm{A}} = (\frac{\pi}{2} - \alpha x)$



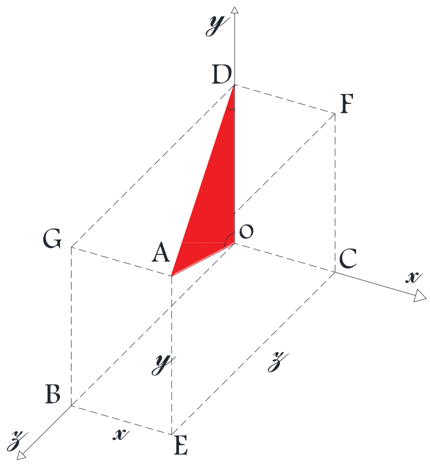
فاصله هر نقطه در فضا نسبت به مبداء مختصات برابر است با :

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{oA}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \overline{oC} = x \end{cases}$$

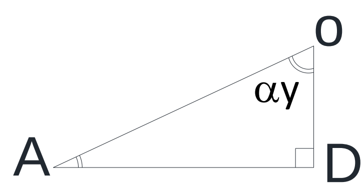
لذا در مثلث $\overset{\triangle}{\mathrm{AoC}}$ داریم:

$$\overline{\mathrm{oC}} = \overline{\mathrm{oA}}. Cos\ \alpha x$$

$$ⓐ\ \boldsymbol{Cos\ \alpha x = \frac{\overline{oC}}{\overline{\mathrm{oA}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

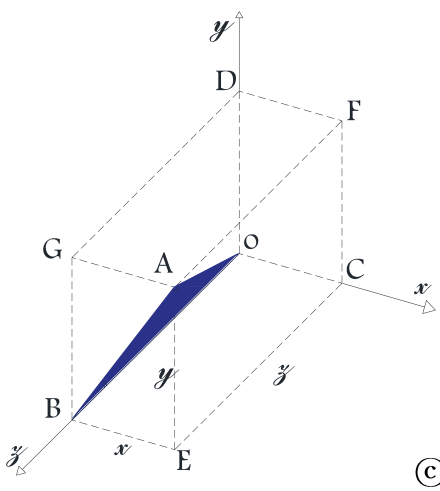


در مثلث $\overset{\triangle}{AoD}$ داریم



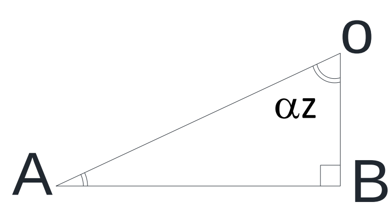
$$\begin{cases}\overline{oA} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \overline{oD} = y\end{cases}$$

ⓑ $$\boldsymbol{Cos\ \alpha y = \frac{\overline{oD}}{\overline{oA}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$



در مثلث $\overset{\triangle}{AoB}$ داریم

$$\begin{cases}\overline{oA} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \overline{oB} = z\end{cases}$$



ⓒ $$\boldsymbol{Cos\ \alpha y = \frac{\overline{oB}}{\overline{oA}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

اینک روابط بین ۳ رابطه ⓐ و ⓑ و ⓒ را اثبات می نمائیم:

ⓐ $$Cos^2\alpha x = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

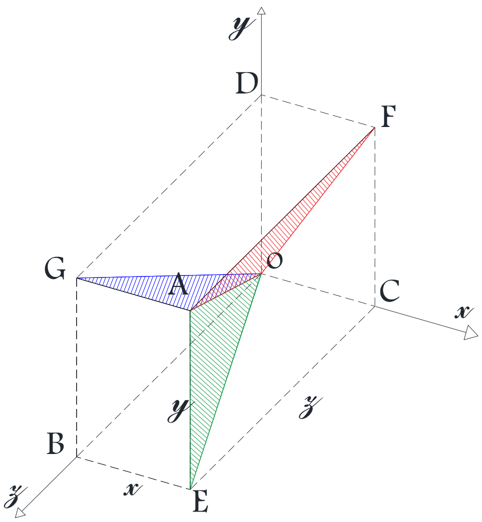
ⓑ $$Cos^2\alpha y = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

ⓒ $$Cos^2\alpha z = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

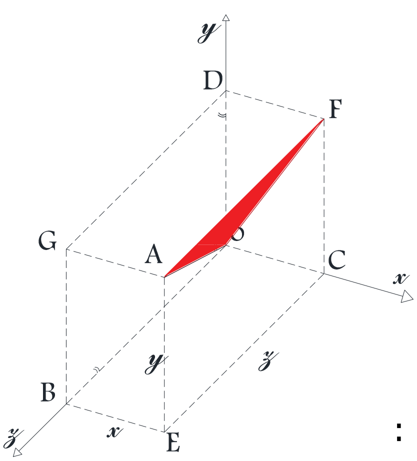
با جمع نمودن ۳ رابطه فوق می توان نوشت:

$$Cos^2\alpha x+\ Cos^2\alpha y+\ Cos^2\alpha z=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1$$

$$\text{ⓓ}\ \boldsymbol{Cos^2\alpha x+\ Cos^2\alpha y+\ Cos^2\alpha z=\ 1}$$



- در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{AoF}$ زاویه $(\hat{F}=\frac{\pi}{2})$ می باشد.
- در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{AoE}$ زاویه $(\hat{E}=\frac{\pi}{2})$ می باشد
- در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{AoG}$ زاویه $(\hat{G}=\frac{\pi}{2})$ می باشد

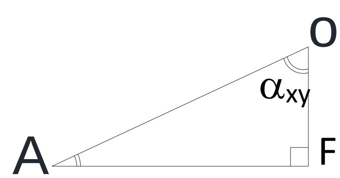


در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{AoF}$ داریم:

$$\hat{F}=\frac{\pi}{2}\qquad,\qquad \hat{o}=\alpha_{xy}$$

$$\overline{oF}=\sqrt{x^2+y^2}$$

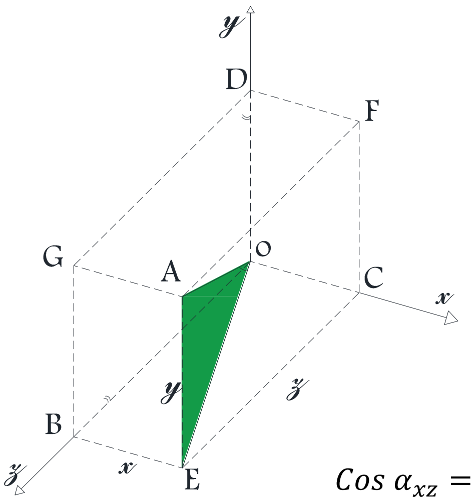
$$\overline{oA}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



فاصله هر نقطه در فضا نسبت به مبداء مختصات برابر است با :

$$Cos\ \alpha_{xy}=\frac{\overline{oF}}{\overline{oA}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+Z^2}}$$

$$\text{ⓔ}\ \boldsymbol{Cos^2\ \alpha_{xy}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+Z^2}}$$

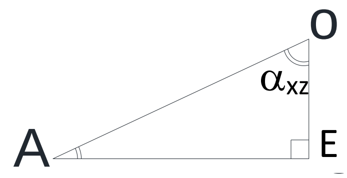


در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{AoE}$ زاویه

$$\widehat{E} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \hat{o} = \alpha_{xz}$$

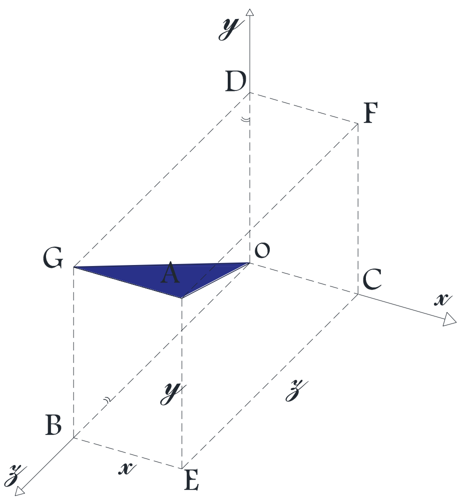
$$\overline{oE} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$\overline{oA} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$Cos\ \alpha_{xz} = \frac{\overline{oE}}{\overline{oA}} = \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+Z^2}}$$

$$ⓕ\ \boldsymbol{Cos^2\alpha_{xz}} = \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+Z^2}$$



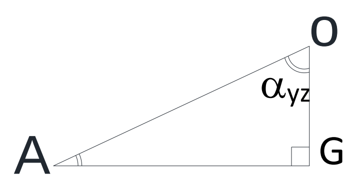
در مثلث $\overset{\triangle}{AoG}$ داریم

$$\widehat{G} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \hat{o} = \alpha_{yz}$$

$$\overline{oG} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$\overline{oA} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$Cos\ \alpha_{yz} = \frac{\overline{oG}}{\overline{oA}} = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+Z^2}}$$



$$ⓖ\ \boldsymbol{Cos^2\alpha_{yz}} = \frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+Z^2}$$

اینک با جمع ۳ فرمول (ⓔ+ⓕ+ⓖ=1) میتوان نتیجه گرفت که جمع سه رابطه فوق مساوی ۱ می باشند:

$$ⓗ\ \boldsymbol{Cos^{2\alpha_{xy}} + Cos^{2\alpha_{xz}} + Cos^{2\alpha_{yz}} = 1}$$

اینک ارتباط جزئیات فرمول ⓓ را با جزئیات فرمول ⓗ به اثبات می رسانیم:

ⓐ $Cos\ \alpha x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow Cos^2\alpha x = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$

ⓑ $Cos\ \alpha y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow Cos^2\alpha y = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$

ⓒ $Cos\ \alpha z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow Cos^2\alpha z = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$

$Cos^2\alpha x + Cos^2\alpha y = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} = Cos^2\alpha_{xy}$

ⓘ $\text{Cos}^2\alpha_x + \text{Cos}^2\alpha_y = \text{Cos}^2\alpha_{xy}$

$Cos^2\alpha x + Cos^2\alpha z = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \text{Cos}^2\alpha_{xz}$

ⓙ $\text{Cos}^2\alpha_x + \text{Cos}^2\alpha_z = \text{Cos}^2\alpha_{xz}$

$Cos^2\alpha y + Cos^2\alpha z = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \text{Cos}^2\alpha_{yz}$

ⓚ $\text{Cos}^2\alpha_y + \text{Cos}^2\alpha_z = \text{Cos}^2\alpha_{yz}$

اینک جهت اثبات ۳ زاویه θ و γ و β :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y}{x} = \tan\beta \\ \frac{z}{x} = \tan\gamma \\ \frac{z}{y} = \tan\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\gamma = \tan\theta \cdot \tan\beta \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{z}{x} = \frac{\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}}{\frac{x}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}} = \frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha x} \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha x}$$

ⓛ $\boldsymbol{\frac{z}{x} = \tan\gamma = \frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha x}}$

$$\frac{z}{y} = \frac{\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}}{\frac{y}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}} = \frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha y} \Rightarrow \frac{z}{y} = \frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha x}$$

ⓛ $\boldsymbol{\frac{z}{x} = \tan\gamma = \frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha x}}$

$$\frac{z}{y}=\frac{\dfrac{z}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}}{\dfrac{y}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}}=\frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha y}\Rightarrow\frac{z}{y}=\frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha x}$$

$$ⓜ\ \boldsymbol{\frac{z}{x}=\tan\theta=\frac{Cos\ \alpha z}{Cos\ \alpha y}}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\dfrac{y}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}}{\dfrac{x}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+Z^2}}}}=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}$$

$$ⓝ\ \boldsymbol{\frac{y}{x}=\tan\beta=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}}$$

فصل دوم

زوایای خط در فضا

جهت بررسی خط در فضا ، لازم بررسی نمائیم چند نوع خط داریم:

گزینه اول : خطوطی که امتداد آن از مبداء مختصات می‌گذرد.

گزینه دوم : خطوطی که امتداد آن از مبداء مختصات نمی‌گذرد.

گزینه اول:

در فصل اول جهت اثبات زوایا راجع به مختصات نقطه (A) در فضا بررسی‌های لازم را انجام دادیم و کلیه روابط بین زوایا را اثبات نمودیم . نکته قابل توجه این است که مختصات نقطه (A) نسبت به مبداء مختصات (o) اثبات شده است. لذا در تمام انواع مثلثات، مثلثات بصورت مثلث قائم الزاویه می باشد و وتر مثلث قائم الزاویه خط $(\overline{oA})$ می باشد. بنابراین کلیه زوایای خط در فضا همان زوایای مربوط به زاویای نقطه در فضا می باشد و نیازی باثبات مجدد نمی باشد. یعنی خط $(\overline{oA})$ از مبداء مختصات می گذرد و $(\overline{oA})$ یک خطی می باشد که از مبداء مختصات می گذرد.

گزینه دوم

جهت اثبات زوایای خط در فضا، اتبداء لازم است مختصات دو نقطه در فضا را داشته باشم

$$A\begin{cases}x_A\\y_A\\z_A\end{cases}\qquad B\begin{cases}x_B\\y_B\\z_B\end{cases}$$

سپس با داشتن مختصات دو نقطه در فضا، می توان تصویر خط $(\overline{AB})$ در فضا را در سه صفحه مختصات (oyz) , (oxz) , (oxy) بدست آوردن با تصویر خط، در ۳ صفحه مختصات می توان معادله خط در هر یک از صفحات مختصات را محاسبه نمود و با داشتن معادله هر خط در سه مختصات، ضریب زاویه خط ($m_\beta=\tan\beta$)ⓝ , ($m_\gamma=\tan\gamma$)ⓛ , ($m_\theta=\tan\theta$)ⓜ بدست آورد. آنگاه با داشتن مقادیر ⓝوⓛو ⓜو ⓓمی توان ($\cos\alpha_x,\cos\alpha_y,\cos\alpha_z$) را بدست آورد. (نکته قابل توجه این است که جهت سهولت در حل مسئله لازم است مبداء مختصات را در یکی از نقاط (A) یا (B) قرار دهیم و در این صورت مسئله را مانند فصل اول حل نمائیم)

سپس مقادیری که در فرمول های قرار دارد ($\cos\alpha_x,\cos\alpha_y,\cos\alpha_z$) قابل محاسبه می باشد.

با حل چند مثال روش حل نمودن مفهوم تر خواهد بود .

تمرین ۱:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}7\\11\\13\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{170}{339}}$
Cos² α_{xy}	$\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{170}{339}$
Sin² α_{xy}	1- Cos² α_{xy}	$=\dfrac{339}{339}-\dfrac{170}{339}=\dfrac{169}{339}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\dfrac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{218}{339}}$
Cos² α_{xz}	$\dfrac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{218}{339}$
Sin² α_{xz}	1- Cos² α_{xz}	$=\dfrac{339}{339}-\dfrac{218}{339}=\dfrac{121}{339}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{290}{339}}$
Cos² α_{yz}	$\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{290}{339}$
Sin² α_{yz}	1- Cos² α_{yz}	$=\dfrac{339}{339}-\dfrac{290}{339}=\dfrac{49}{339}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\frac{170}{339}+\frac{218}{339}+\frac{290}{339}=\frac{678}{339}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\frac{169}{339}+\frac{121}{339}+\frac{49}{339}=\frac{339}{339}=1$

ادامه تمرین ۱:

$$o\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \qquad A\begin{vmatrix}7\\11\\13\end{vmatrix}$$

Cos α_x	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{7}{\sqrt{49+121+169}}=\frac{7}{\sqrt{339}}$
Cos² α_x	$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{49}{339}$
Sin² α_x	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{290}{339}$
Cos α_y	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{11}{\sqrt{339}}$
Cos² α_y	$\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{121}{339}$
Sin² α_y	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{339-121}{339}=\frac{218}{339}$
Cos α_z	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{13}{\sqrt{339}}$
Cos² α_z	$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{169}{339}$
Sin² α_z	1- Cos² α_{yz}	$=\frac{339-169}{339}=\frac{170}{339}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$
Tan β$=\frac{y}{x}=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}$		$=\frac{11}{7}$
Cos² α_x+ Cos² α_y+ Cos² α_z=1		$=\frac{49}{339}+\frac{121}{339}+\frac{169}{339}=\frac{339}{339}=1$

تمرین ۲:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}17\\19\\23\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{289+361}{1179}}=\sqrt{\frac{650}{1179}}$
Cos² α_{xy}	$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{650}{1179}$
Sin² α_{xy}	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{1179}{1179}-\frac{650}{1179}=\frac{529}{1179}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{289+529}{1179}}=\sqrt{\frac{818}{1179}}$
Cos² α_{xz}	$\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{818}{1179}$
Sin² α_{xz}	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{1179}{1179}-\frac{818}{1179}=\frac{261}{1179}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{361+529}{1179}}=\sqrt{\frac{890}{1179}}$
Cos² α_{yz}	$\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{890}{1179}$
Sin² α_{yz}	1- Cos² α_{yz}	$=\frac{1179}{1179}-\frac{890}{1179}=\frac{289}{1179}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\frac{650}{1179}+\frac{818}{1179}+\frac{890}{1179}=\frac{2358}{1179}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\frac{529}{1179}+\frac{361}{1179}+\frac{289}{1179}=\frac{1179}{1179}=1$

ادامه تمرین ۲:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}17\\19\\23\end{matrix}\right.$$

Cos α_x	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{17}{\sqrt{289+361+529}}=\frac{17}{\sqrt{1179}}$
Cos² α_x	$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{289}{1179}$
Sin² α_x	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{1179}{1179}-\frac{289}{1179}=\frac{890}{1179}$
Cos α_y	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{19}{\sqrt{1179}}$
Cos² α_y	$\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{361}{1179}$
Sin² α_y	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{1179}{1179}-\frac{361}{1179}=\frac{818}{1179}$
Cos α_z	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{23}{\sqrt{1179}}$
Cos² α_z	$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{529}{1179}$
Sin² α_z	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{1179}{1179}=\frac{529}{1179}=\frac{650}{1179}$
Tan $\beta=\frac{y}{x}=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}$		$=\frac{\frac{19}{\sqrt{1179}}}{\frac{17}{\sqrt{1179}}}=\frac{19}{17}$
Cos² α_x+ Cos² α_y+ Cos² α_z=1		$=\frac{289}{1179}+\frac{261}{1179}+\frac{529}{1179}=\frac{1179}{1179}=1$

تمرین ۳:

$$o\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \qquad A\begin{vmatrix}29\\31\\37\end{vmatrix}$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{841+961}{3171}}=\sqrt{\frac{1802}{1179}}$
Cos² α_{xy}	$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{1802}{3171}$
Sin² α_{xy}	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{3171}{3171}-\frac{1802}{3171}=\frac{1369}{3171}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{841+1369}{3171}}=\sqrt{\frac{2210}{3171}}$
Cos² α_{xz}	$\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{2210}{3171}$
Sin² α_{xz}	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{3171}{3171}-\frac{2210}{3171}=\frac{961}{3171}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{961+1369}{3171}}=\sqrt{\frac{2330}{3171}}$
Cos² α_{yz}	$\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{2330}{3171}$
Sin² α_{yz}	1- Cos² α_{yz}	$=\frac{3171}{3171}-\frac{2330}{3171}=\frac{841}{3171}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\frac{1802}{3171}+\frac{2210}{3171}+\frac{2330}{3171}=\frac{6340}{3171}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\frac{1369}{3171}+\frac{961}{3171}+\frac{841}{3171}=\frac{3171}{3171}=1$

ادامه تمرین ۳:

$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}29\\31\\37\end{matrix}\right.$

$\cos\alpha_x$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{29}{\sqrt{289+361+529}}=\frac{29}{\sqrt{3171}}$
$\cos^2\alpha_x$	$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{841}{3171}$
$\sin^2\alpha_x$	$1-\cos^2\alpha_{xy}$	$=\frac{3171}{3171}-\frac{841}{3171}=\frac{2330}{3171}$
$\cos\alpha_y$	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{31}{\sqrt{3171}}$
$\cos^2\alpha_y$	$\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{961}{3171}$
$\sin^2\alpha_y$	$1-\cos^2\alpha_{xz}$	$=\frac{3171}{3171}-\frac{960}{3171}=\frac{2210}{3171}$
$\cos\alpha_z$	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{37}{\sqrt{3171}}$
$\cos^2\alpha_z$	$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{1369}{3171}$
$\sin^2\alpha_z$	$1-\cos^2\alpha_{xz}$	$=\frac{3171}{3171}=\frac{1369}{3171}=\frac{1802}{3171}$
$\tan\beta=\frac{y}{x}=\frac{\cos\alpha y}{\cos\alpha x}$		$=\frac{31}{29}=\frac{\frac{31}{\sqrt{3171}}}{\frac{29}{\sqrt{3171}}}=\frac{31}{29}$
$\cos^2\alpha_x+\cos^2\alpha_y+\cos^2\alpha_z=1$		$=\frac{841}{3171}+\frac{961}{3171}+\frac{1369}{3171}=\frac{3171}{3171}=1$

تمرین ۴ :

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}41\\43\\47\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{1681+1849}{5739}}=\sqrt{\frac{3530}{5739}}$
Cos² α_{xy}	$\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{3530}{5739}$
Sin² α_{xy}	1- Cos² α_{xy}	$=\dfrac{5739}{5739}-\dfrac{3530}{5739}=\dfrac{2209}{5739}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\dfrac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{1681+2209}{5739}}=\sqrt{\frac{3890}{5739}}$
Cos² α_{xz}	$\dfrac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{3890}{5739}$
Sin² α_{xz}	1- Cos² α_{xz}	$=\dfrac{5739}{5739}-\dfrac{3890}{5739}=\dfrac{1849}{5739}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{1849+2209}{5739}}=\sqrt{\frac{4058}{5739}}$
Cos² α_{yz}	$\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{4058}{5739}$
Sin² α_{yz}	1- Cos² α_{yz}	$=\dfrac{5739}{5739}-\dfrac{4058}{5739}=\dfrac{1681}{5739}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\frac{3530}{5739}+\frac{3890}{5739}+\frac{4058}{5739}=\frac{11478}{5739}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\frac{2209}{5739}+\frac{1849}{5739}+\frac{1681}{5739}=\frac{5739}{5739}=1$

ادامه تمرین ۴:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}41\\43\\47\end{matrix}\right.$$

Cos α_x	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{41}{\sqrt{1681+1849+2209}}=\frac{41}{\sqrt{5739}}$
Cos² α_x	$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{1681}{5739}$
Sin² α_x	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{5739}{5739}-\frac{1681}{5739}=\frac{4058}{5739}$
Cos α_y	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{43}{\sqrt{5739}}$
Cos² α_y	$\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{1849}{5739}$
Sin² α_y	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{5739}{5739}-\frac{1849}{5739}=\frac{3890}{5739}$
Cos α_z	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{47}{\sqrt{5739}}$
Cos² α_z	$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{2209}{5739}$
Sin² α_z	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{5739}{5739}=\frac{2209}{5739}=\frac{3530}{5739}$
Tan $\beta=\frac{y}{x}=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}$		$=\frac{43}{41}=\frac{\frac{43}{\sqrt{5739}}}{\frac{41}{\sqrt{5739}}}=\frac{43}{41}$
Cos² α_x+ Cos² α_y+ Cos² α_z=1		$=\frac{1681}{5739}+\frac{1849}{5739}+\frac{2209}{5739}=\frac{5729}{5739}=1$

تمرین ۵:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}49\\51\\53\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{2401+2601}{7811}}=\sqrt{\frac{5002}{7811}}$
Cos² α_{xy}	$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{5002}{7811}$
Sin² α_{xy}	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{7811}{7811}-\frac{5002}{7811}=\frac{2809}{7811}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{2401+2809}{7811}}=\sqrt{\frac{5210}{7811}}$
Cos² α_{xz}	$\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{5210}{7811}$
Sin² α_{xz}	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{7811}{7811}-\frac{5210}{7811}=\frac{2601}{7811}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\frac{2601+2809}{7811}}=\sqrt{\frac{5410}{7811}}$
Cos² α_{yz}	$\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{5410}{7811}$
Sin² α_{yz}	1- Cos² α_{yz}	$=\frac{7811}{7811}-\frac{5410}{7811}=\frac{2401}{7811}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\frac{5002}{7811}+\frac{5210}{7811}+\frac{5410}{7811}=\frac{15622}{7811}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\frac{2809}{7811}+\frac{2601}{7811}+\frac{2401}{7811}=\frac{7811}{7811}=1$

ادامه تمرین ۵:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}49\\51\\53\end{matrix}\right.$$

Cos α_x	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{49}{\sqrt{2401+2601+2809}}=\frac{49}{\sqrt{7811}}$
Cos² α_x	$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{2401}{7811}$
Sin² α_x	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{7811}{7811}-\frac{2401}{7811}=\frac{5401}{7811}$
Cos α_y	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{51}{\sqrt{7811}}$
Cos² α_y	$\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{2601}{7811}$
Sin² α_y	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{7811}{7811}-\frac{2601}{7811}=\frac{5211}{7811}$
Cos α_z	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{53}{\sqrt{7811}}$
Cos² α_z	$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{2809}{7811}$
Sin² α_z	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{7811}{7811}=\frac{2809}{7811}=\frac{5002}{7811}$
Tan $\beta=\frac{y}{x}=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}$		$=\frac{51}{49}=\frac{\frac{51}{\sqrt{7811}}}{\frac{49}{\sqrt{7811}}}=\frac{51}{49}$
Cos² α_x+ Cos² α_y+ Cos² α_z=1		$=\frac{2401}{7811}+\frac{2601}{7811}+\frac{2809}{7811}=\frac{7811}{7811}=1$

تمرین ۶:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}57\\59\\61\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{3249+3481}{10451}}=\sqrt{\dfrac{6730}{10451}}$
Cos² α_{xy}	$\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{6730}{10451}$
Sin² α_{xy}	1- Cos² α_{xy}	$=\dfrac{10451}{10451}-\dfrac{6730}{10451}=\dfrac{3721}{10451}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\dfrac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{3249+3721}{10451}}=\sqrt{\dfrac{6970}{10451}}$
Cos² α_{xz}	$\dfrac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{6970}{10451}$
Sin² α_{xz}	1- Cos² α_{xz}	$=\dfrac{10451}{10451}-\dfrac{6970}{10451}=\dfrac{3481}{10451}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{3481+3371}{10451}}=\sqrt{\dfrac{7202}{10451}}$
Cos² α_{yz}	$\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\dfrac{7202}{10451}$
Sin² α_{yz}	1- Cos² α_{yz}	$=\dfrac{10451}{10451}-\dfrac{7202}{10451}=\dfrac{3249}{10451}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\dfrac{6730}{10451}+\dfrac{6970}{10451}+\dfrac{7202}{10451}=\dfrac{20902}{10451}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\dfrac{3721}{10451}+\dfrac{3481}{10451}+\dfrac{3249}{10451}=\dfrac{10451}{10451}=1$

ادامه تمرین ۶:

$$o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix}57\\59\\61\end{matrix}\right.$$

Cos α_x	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{57}{\sqrt{2401+2601+2809}}=\frac{57}{\sqrt{10451}}$
Cos² α_x	$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{3249}{10451}$
Sin² α_x	1- Cos² α_{xy}	$=\frac{10451}{10451}-\frac{3249}{10451}=\frac{7202}{10451}$
Cos α_y	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{59}{\sqrt{10451}}$
Cos² α_y	$\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{3481}{10451}$
Sin² α_y	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{10451}{10451}-\frac{3481}{10451}=\frac{6970}{10451}$
Cos α_z	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=\frac{61}{\sqrt{10451}}$
Cos² α_z	$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$	$=\frac{3721}{10451}$
Sin² α_z	1- Cos² α_{xz}	$=\frac{10451}{10451}=\frac{3721}{10451}=\frac{6730}{10451}$
Tan $\beta=\frac{y}{x}=\frac{Cos\ \alpha y}{Cos\ \alpha x}$		$=\frac{59}{57}=\frac{\frac{59}{\sqrt{10451}}}{\frac{57}{\sqrt{10451}}}=\frac{59}{57}$
Cos² α_x+ Cos² α_y+ Cos² α_z=1		$=\frac{3249}{10451}+\frac{3481}{10451}+\frac{3721}{10451}=\frac{10451}{10451}=1$

تمرین ۷:

X=4
Y=8
Z=16

Cos α_X	$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{4}{\sqrt{16+64+256}}=\frac{4}{\sqrt{336}}$
Cos² α_X	$\frac{X^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{16}{336}$
Sin² α_X	1- Cos² α_X	$=\frac{336}{336}-\frac{16}{336}=\frac{320}{336}$
Cos α_Y	$\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{8}{\sqrt{336}}$
Cos² α_Y	$\frac{Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{64}{336}$
Sin² α_Y	1- Cos² α_Y	$=\frac{336}{336}-\frac{64}{336}=\frac{272}{336}$
Cos α_Z	$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{16}{\sqrt{336}}$
Cos² α_Z	$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{259}{336}$
Sin² α_Z	1- Cos² α_Z	$=\frac{336}{336}=\frac{256}{336}=\frac{80}{336}$
tan $\beta=\frac{Y}{X}=\frac{\text{Cos}\,\alpha_Y}{\text{Cos}\,\alpha_X}$		$=\frac{8}{4}=\frac{\frac{8}{\sqrt{336}}}{\frac{4}{\sqrt{336}}}=\frac{8}{4}=2$
Cos² α_X+ Cos² α_Y+ Cos² α_Z=1		$=\frac{16}{336}+\frac{64}{336}+\frac{256}{336}=\frac{336}{336}=1$

ادامه تمرین ۷:

$$A\left|\begin{matrix}13\\11\\7\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}17\\19\\23\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix}\alpha=13 & x=X+\alpha \Rightarrow X=x-\alpha=17-13=4\\ \beta=11 & y=Y+\beta \Rightarrow Y=y-\beta=19-11=8\\ \gamma=7 & z=Z+\gamma \Rightarrow Z=z-\gamma=23-7=16\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}x=4\\y=8\\z=16\end{matrix} \qquad o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{16+64+256}}=\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{336}}$
Cos² α_{xy}	$\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{80}{336}$
Sin² α_{xy}	1- COS² α_{XY}	$=\dfrac{336}{336}-\dfrac{80}{336}=\dfrac{256}{336}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{16+256}{336}}=\sqrt{\dfrac{272}{336}}$
Cos² α_{xz}	$\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{272}{336}$
Sin² α_{xz}	1- COS² α_{XZ}	$=\dfrac{336}{336}-\dfrac{272}{336}=\dfrac{64}{336}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{64+256}{336}}=\sqrt{\dfrac{320}{336}}$
Cos² α_{yz}	$\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{7202}{336}$
Sin² α_{yz}	1- COS² α_{YZ}	$=\dfrac{336}{336}-\dfrac{320}{336}=\dfrac{16}{336}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\dfrac{80}{336}+\dfrac{272}{336}+\dfrac{320}{336}=\dfrac{672}{10336}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\dfrac{256}{336}+\dfrac{64}{336}+\dfrac{16}{336}=\dfrac{336}{336}=1$
tan $\alpha_{XY}=\dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ TAN $\alpha_{XZ}=\dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Z^2}}$ TAN $\alpha_{YZ}=\dfrac{X}{\sqrt{Y^2+Z^2}}$		

تمرین ۸:

$$A\left|\begin{array}{l}17\\19\\23\end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l}107\\111\\113\end{array}\right.$$

$x = X + \alpha \Rightarrow X = x + \alpha = 17 \qquad X = 107 - 17 = 90 \Rightarrow X = 90$

$y = Y + \beta \Rightarrow Y = y + \beta = 19 \qquad Y = 111 - 19 = 92 \Rightarrow Y = 92$

$z = Z + \gamma \Rightarrow Z = z + \gamma = 23 \qquad Z = 113 - 23 = 90 \Rightarrow Z = 90$

$\cos \alpha_X$	$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{90}{\sqrt{8100+8464+8100}} = \frac{90}{\sqrt{24664}}$
$\cos^2 \alpha_X$	$\frac{X^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$= \frac{8100}{24664}$
$\sin^2 \alpha_X$	$1-\cos^2 \alpha_X$	$= \frac{24664}{24664} - \frac{8100}{24664} = \frac{16564}{24664}$
$\cos \alpha_Y$	$\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{92}{\sqrt{24664}}$
$\cos^2 \alpha_Y$	$\frac{Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$= \frac{8464}{24664}$
$\sin^2 \alpha_Y$	$1-\cos^2 \alpha_Y$	$= \frac{24664}{24664} - \frac{8464}{24664} = \frac{16200}{24664}$
$\cos \alpha_Z$	$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{90}{\sqrt{24664}}$
$\cos^2 \alpha_Z$	$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$= \frac{8100}{24664}$
$\sin^2 \alpha_Z$	$1-\cos^2 \alpha_Z$	$= \frac{24664}{24664} = \frac{8100}{24664} = \frac{16564}{24664}$
$\tan \beta = \frac{Y}{X} = \frac{\cos \alpha_Y}{\cos \alpha_X}$		$= \frac{92}{90} = \frac{\frac{92}{\sqrt{24664}}}{\frac{90}{\sqrt{24664}}} = \frac{92}{90}$
$\cos^2 \alpha_X + \cos^2 \alpha_Y + \cos^2 \alpha_Z = 1$		$= \frac{8100}{24664} + \frac{8464}{24664} + \frac{8100}{24664} = \frac{24664}{24664} = 1$

ادامه تمرین ۸:

$A\begin{vmatrix}17\\19\\23\end{vmatrix}\qquad B\begin{vmatrix}107\\111\\113\end{vmatrix}$

$X = 90$
$Y = 92$
$Z = 90$

$o\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{\sqrt{8100+8464}}{\sqrt{24664}}=\frac{\sqrt{16564}}{\sqrt{24664}}$
Cos² α_{xy}	$\frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{16564}{24664}$
Sin² α_{xy}	1- COS² α_{XY}	$=\frac{24664}{24664}-\frac{16564}{24664}=\frac{8100}{24664}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\frac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\frac{16200}{24664}}$
Cos² α_{xz}	$\frac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{16200}{24664}$
Sin² α_{xz}	1- COS² α_{XZ}	$=\frac{24664}{24664}-\frac{16200}{24664}=\frac{8464}{24664}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\frac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\frac{8464+8100}{24664}}=\sqrt{\frac{16564}{24664}}$
Cos² α_{yz}	$\frac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{16564}{24664}$
Sin² α_{yz}	1- COS² α_{YZ}	$=\frac{24664}{24664}-\frac{16564}{24664}=\frac{8100}{24664}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\frac{16564}{24664}+\frac{16200}{24664}+\frac{16564}{24664}=\frac{49328}{24664}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\frac{8100}{24664}+\frac{8464}{24664}+\frac{8100}{24664}=\frac{24664}{24664}=1$
tan α_{xy}=$\frac{Z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{90}{\sqrt{16564}}$ tan α_{YZ}=$\frac{X}{\sqrt{y^2+Z^2}}=\frac{90}{\sqrt{16564}}$		tan α_{xz}=$\frac{Y}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{92}{\sqrt{16200}}$

تمرین ۹:

$$A\left|\begin{matrix}29\\31\\37\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}97\\101\\103\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix}x = X + 29\\ y = Y + 31\\ z = Z + 37\end{matrix} \qquad \begin{matrix}X = 97 - 29 = 68\\ Y = 101 - 31 = 71\\ Z = 103 - 37 = 66\end{matrix}$$

Cos α_X	$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{68}{\sqrt{4624+5041+4356}}=\frac{68}{\sqrt{14021}}$
$Cos^2\ \alpha_X$	$\frac{X^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{4624}{14021}$
$Sin^2\ \alpha_X$	1- $Cos^2\ \alpha_X$	$=\frac{14021}{14021}-\frac{4624}{14021}=\frac{9577}{14021}$
Cos α_Y	$\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{71}{\sqrt{14021}}$
$Cos^2\ \alpha_Y$	$\frac{Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{5041}{14021}$
$Sin^2\ \alpha_Y$	1- $Cos^2\ \alpha_Y$	$=\frac{14021}{14021}-\frac{5041}{14021}=\frac{9160}{14021}$
Cos α_Z	$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{66}{\sqrt{14021}}$
$Cos^2\ \alpha_Z$	$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{4356}{14021}$
$Sin^2\ \alpha_Z$	1- $Cos^2\ \alpha_Z$	$=\frac{14021}{14021}=\frac{5041}{14021}=\frac{9160}{14021}$
tan $\beta=\frac{Y}{X}=\frac{\text{Cos}\ \alpha_Y}{\text{Cos}\ \alpha_X}$		$=\frac{71}{68}=\frac{\frac{71}{\sqrt{14021}}}{\frac{68}{\sqrt{14021}}}=\frac{71}{68}$
$Cos^2\ \alpha_X+ Cos^2\ \alpha_Y+ Cos^2\ \alpha_Z=1$		$=\frac{4624}{14021}+\frac{5041}{14021}+\frac{4356}{14021}=\frac{14021}{14021}=1$

ادامه تمرین ۹:

$$X = 68 \qquad Y = 71 \qquad Z = 66 \qquad o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\dfrac{\sqrt{4624+5041}}{\sqrt{14021}}=\dfrac{\sqrt{8665}}{\sqrt{14021}}$
Cos² α_{xy}	$\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{9665}{14021}$
Sin² α_{xy}	1- COS² α_{XY}	$=\dfrac{14021}{14021}-\dfrac{9665}{14021}=\dfrac{4356}{14021}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{4624+4356}{14021}}=\sqrt{\dfrac{8980}{14021}}$
Cos² α_{xz}	$\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{8980}{14021}$
Sin² α_{xz}	1- COS² α_{XZ}	$=\dfrac{14021}{14021}-\dfrac{8980}{14021}=\dfrac{5041}{14021}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{5041+4356}{14021}}=\sqrt{\dfrac{9397}{14021}}$
Cos² α_{yz}	$\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{9397}{14021}$
Sin² α_{yz}	1- COS² α_{YZ}	$=\dfrac{14021}{14021}-\dfrac{9397}{14021}=\dfrac{4624}{14021}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\dfrac{9665}{14021}+\dfrac{8980}{14021}+\dfrac{9397}{14021}=\dfrac{28042}{14021}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\dfrac{4356}{14021}+\dfrac{5041}{14021}+\dfrac{4624}{14021}=\dfrac{14021}{14021}=1$
tan $\alpha_{xy}=\dfrac{Z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{66}{\sqrt{9665}}$ tan $\alpha_{YZ}=\dfrac{X}{\sqrt{y^2+Z^2}}=\dfrac{68}{\sqrt{9397}}$		tan $\alpha_{xz}=\dfrac{Y}{\sqrt{x^2+z^2}}=\dfrac{71}{\sqrt{8980}}$

تمرین ۱۰:

$A\left|\begin{matrix}41\\43\\47\end{matrix}\right.\qquad B\left|\begin{matrix}83\\89\\91\end{matrix}\right.$

$$x = \mathrm{X} - \alpha \Rightarrow \mathrm{X} = x - 41 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{X} = 83 - 41 = 42$$
$$y = \mathrm{Y} - \beta \Rightarrow \mathrm{Y} = \mathrm{y} - 43 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Y} = 89 - 43 = 46$$
$$z = \mathrm{Z} - \gamma \Rightarrow \mathrm{Z} = \mathrm{z} - 47 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Z} = 91 - 47 = 44$$

$\mathrm{Cos}\ \alpha_X$	$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{42}{\sqrt{1764+2116+1936}}=\frac{42}{\sqrt{5816}}$
$\mathrm{Cos}^2\ \alpha_X$	$\frac{X^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{1764}{5816}$
$\mathrm{Sin}^2\ \alpha_X$	$1-\mathrm{Cos}^2\ \alpha_X$	$=\frac{5816}{5816}-\frac{1764}{5816}=\frac{4052}{5816}$
$\mathrm{Cos}\ \alpha_Y$	$\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{46}{\sqrt{5816}}$
$\mathrm{Cos}^2\ \alpha_Y$	$\frac{Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{2116}{5816}$
$\mathrm{Sin}^2\ \alpha_Y$	$1-\mathrm{Cos}^2\ \alpha_Y$	$=\frac{5816}{5816}-\frac{2116}{5816}=\frac{3700}{5816}$
$\mathrm{Cos}\ \alpha_Z$	$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{44}{\sqrt{5816}}$
$\mathrm{Cos}^2\ \alpha_Z$	$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{1936}{5816}$
$\mathrm{Sin}^2\ \alpha_Z$	$1-\mathrm{Cos}^2\ \alpha_Z$	$=\frac{5816}{5816}=\frac{1936}{5816}=\frac{3880}{5816}$
$\tan\beta=\frac{Y}{X}=\frac{\mathrm{Cos}\ \alpha_Y}{\mathrm{Cos}\ \alpha_X}$		$=\frac{46}{42}=\frac{\frac{46}{\sqrt{5816}}}{\frac{42}{\sqrt{5816}}}=\frac{46}{42}$
$\mathrm{Cos}^2\ \alpha_X+\mathrm{Cos}^2\ \alpha_Y+\mathrm{Cos}^2\ \alpha_Z=1$		$=\frac{1764}{5816}+\frac{2116}{5816}+\frac{1936}{5816}=\frac{5816}{5816}=1$

ادامه تمرین ۱۰:

$$X = 42 \quad Y = 46 \quad Z = 44 \qquad o \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\dfrac{\sqrt{1764+2116}}{\sqrt{5816}}=\dfrac{\sqrt{3880}}{\sqrt{5816}}$
Cos² α_{xy}	$\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{3880}{5816}$
Sin² α_{xy}	1- COS² α_{XY}	$=\dfrac{5816}{5816}-\dfrac{3880}{5816}=\dfrac{1936}{5816}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{1764+1936}{5816}}=\sqrt{\dfrac{3700}{5816}}$
Cos² α_{xz}	$\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{3700}{5816}$
Sin² α_{xz}	1- COS² α_{XZ}	$=\dfrac{5816}{5816}-\dfrac{3700}{5816}=\dfrac{2116}{5816}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{2116+1936}{5816}}=\sqrt{\dfrac{4052}{5816}}$
Cos² α_{yz}	$\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{4052}{5816}$
Sin² α_{yz}	1- COS² α_{YZ}	$=\dfrac{5816}{5816}-\dfrac{4052}{5816}=\dfrac{1764}{5816}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\dfrac{3880}{5816}+\dfrac{3700}{5816}+\dfrac{4052}{5816}=\dfrac{11632}{5816}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\dfrac{1936}{5816}+\dfrac{2116}{5816}+\dfrac{1764}{5816}=\dfrac{5816}{5816}=1$
tan $\alpha_{xy}=\dfrac{Z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{44}{\sqrt{3880}}$ tan $\alpha_{YZ}=\dfrac{X}{\sqrt{y^2+Z^2}}=\dfrac{42}{\sqrt{4052}}$		tan $\alpha_{xz}=\dfrac{Y}{\sqrt{x^2+z^2}}=\dfrac{46}{\sqrt{3700}}$

تمرین ۱۱:

$$A\left|\begin{matrix}49\\51\\53\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}73\\79\\83\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} x = X + \alpha \Rightarrow X = x - 49 & \Rightarrow & X = 49 \\ y = Y + \beta \Rightarrow Y = y - 51 & \Rightarrow & Y = 51 \\ z = Z + \gamma \Rightarrow Z = z - 53 & \Rightarrow & Z = 53 \end{matrix}$$

$\cos \alpha_X$	$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{24}{\sqrt{2260}}$
$\cos^2 \alpha_X$	$\frac{X^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{576}{2260}$
$\sin^2 \alpha_X$	$1-\cos^2 \alpha_X$	$=\frac{2260}{2260}-\frac{576}{2260}=\frac{1684}{2260}$
$\cos \alpha_Y$	$\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{28}{\sqrt{2260}}$
$\cos^2 \alpha_Y$	$\frac{Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{784}{2260}$
$\sin^2 \alpha_Y$	$1-\cos^2 \alpha_Y$	$=\frac{2260}{2260}-\frac{784}{2260}=\frac{1476}{2260}$
$\cos \alpha_Z$	$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{30}{\sqrt{2260}}$
$\cos^2 \alpha_Z$	$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{900}{2260}$
$\sin^2 \alpha_Z$	$1-\cos^2 \alpha_Z$	$=\frac{2260}{2260}=\frac{900}{2260}=\frac{1360}{2260}$
$\tan \beta=\frac{Y}{X}=\frac{\cos \alpha_Y}{\cos \alpha_X}$		$=\frac{28}{24}=\frac{\frac{28}{\sqrt{2260}}}{\frac{24}{\sqrt{2260}}}=\frac{28}{24}$
$\cos^2 \alpha_X+\cos^2 \alpha_Y+\cos^2 \alpha_Z=1$		$=\frac{576}{2260}+\frac{784}{2260}+\frac{900}{2260}=\frac{2260}{2260}=1$

ادامه تمرین ۱۱:

$$X = 73 - 49 = 24 \qquad Y = 79 - 51 = 28 \qquad Z = 83 - 53 = 30 \qquad o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$$

Cos α_{xy}	$\sqrt{\frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{\sqrt{576+784}}{\sqrt{2260}}=\frac{\sqrt{1360}}{\sqrt{2260}}$
Cos² α_{xy}	$\frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{1360}{2260}$
Sin² α_{xy}	1- COS² α_{XY}	$=\frac{2260}{2260}-\frac{1360}{2260}=\frac{900}{2260}$
Cos α_{xz}	$\sqrt{\frac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\frac{576+900}{2260}}=\sqrt{\frac{1476}{2260}}$
Cos² α_{xz}	$\frac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{1476}{2260}$
Sin² α_{xz}	1- COS² α_{XZ}	$=\frac{2260}{2260}-\frac{1476}{2260}=\frac{784}{2260}$
Cos α_{yz}	$\sqrt{\frac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\frac{784+900}{2260}}=\sqrt{\frac{1684}{2260}}$
Cos² α_{yz}	$\frac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{1684}{2260}$
Sin² α_{yz}	1- COS² α_{YZ}	$=\frac{2260}{2260}-\frac{1684}{2260}=\frac{576}{2260}$
Cos² α_{xy}+ Cos² α_{xz}+ Cos² α_{yz}=2		$=\frac{1360}{2260}+\frac{1476}{2260}+\frac{1684}{2260}=\frac{4520}{2260}=2$
Sin² α_{xy}+ Sin² α_{xz}+ Sin² α_{yz}=1		$=\frac{900}{2260}+\frac{784}{2260}+\frac{576}{2260}=\frac{2260}{2260}=1$
tan $\alpha_{xy}=\frac{Z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{30}{\sqrt{1360}}$ tan $\alpha_{YZ}=\frac{X}{\sqrt{y^2+Z^2}}=\frac{24}{\sqrt{1684}}$		tan $\alpha_{xz}=\frac{Y}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{28}{\sqrt{1476}}$

تمرین ۱۲:

$$A\left|\begin{matrix}53\\57\\59\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}63\\67\\71\end{matrix}\right.$$

$$x = X + \alpha \Rightarrow X = x - 53 \quad \Rightarrow \quad X = 63 - 41 = 10$$
$$y = Y + \beta \Rightarrow Y = y - 57 \quad \Rightarrow \quad Y = 67 - 57 = 10$$
$$z = Z + \gamma \Rightarrow Z = z - 59 \quad \Rightarrow \quad Z = 71 - 59 = 12$$

Cos α_X	$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{10}{\sqrt{100+100+144}}=\frac{10}{\sqrt{344}}$
Cos² α_X	$\frac{X^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{100}{344}$
Sin² α_X	1- Cos² α_X	$=\frac{344}{344}-\frac{100}{344}=\frac{244}{344}$
Cos α_Y	$\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{10}{\sqrt{344}}$
Cos² α_Y	$\frac{Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{100}{344}$
Sin² α_Y	1- Cos² α_Y	$=\frac{344}{344}-\frac{100}{344}=\frac{244}{344}$
Cos α_Z	$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\frac{12}{\sqrt{344}}$
Cos² α_Z	$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\frac{144}{344}$
Sin² α_Z	1- Cos² α_Z	$=\frac{344}{344}=\frac{144}{344}=\frac{200}{344}$
tan $\beta=\frac{Y}{X}=\frac{\text{Cos}\,\alpha_Y}{\text{Cos}\,\alpha_X}$		$=\frac{10}{10}=\frac{\frac{10}{\sqrt{344}}}{\frac{10}{\sqrt{344}}}=1$
Cos² α_X+ Cos² α_Y+ Cos² α_Z=1		$=\frac{100}{344}+\frac{100}{344}+\frac{144}{344}=\frac{344}{344}=1$

ادامه تمرین ۱۲:

$$X = 10 \qquad Y = 10 \qquad Z = 12 \qquad o\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$$

$\cos \alpha_{xy}$	$\sqrt{\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\dfrac{\sqrt{100+100}}{\sqrt{344}}=\dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{344}}$
$\cos^2 \alpha_{xy}$	$\dfrac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{200}{344}$
$\sin^2 \alpha_{xy}$	$1-\cos^2 \alpha_{XY}$	$=\dfrac{344}{344}-\dfrac{200}{344}=\dfrac{144}{344}$
$\cos \alpha_{xz}$	$\sqrt{\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{100+144}{344}}=\sqrt{\dfrac{244}{344}}$
$\cos^2 \alpha_{xz}$	$\dfrac{X^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{244}{344}$
$\sin^2 \alpha_{xz}$	$1-\cos^2 \alpha_{XZ}$	$=\dfrac{344}{344}-\dfrac{244}{344}=\dfrac{100}{344}$
$\cos \alpha_{yz}$	$\sqrt{\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}}$	$=\sqrt{\dfrac{100+144}{344}}=\sqrt{\dfrac{244}{344}}$
$\cos^2 \alpha_{yz}$	$\dfrac{Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$	$=\dfrac{244}{344}$
$\sin^2 \alpha_{yz}$	$1-\cos^2 \alpha_{YZ}$	$=\dfrac{344}{344}-\dfrac{244}{344}=\dfrac{100}{344}$
$\cos^2 \alpha_{xy}+\cos^2 \alpha_{xz}+\cos^2 \alpha_{yz}=2$		$=\dfrac{200}{344}+\dfrac{244}{344}+\dfrac{244}{344}=\dfrac{688}{344}=2$
$\sin^2 \alpha_{xy}+\sin^2 \alpha_{xz}+\sin^2 \alpha_{yz}=1$		$=\dfrac{144}{344}+\dfrac{100}{344}+\dfrac{100}{344}=\dfrac{344}{344}=1$
$\tan \alpha_{xy}=\dfrac{Z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{200}}$ $\tan \alpha_{YZ}=\dfrac{X}{\sqrt{y^2+Z^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{244}}$		$\tan \alpha_{xz}=\dfrac{Y}{\sqrt{x^2+z^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{244}}$

فصل سوم
سرعت زاویه‌ای

محاسبه سرعت زاویه‌ای به سه روش قابل اندازه گیری می باشد:
الف: اثبات سرعت زاویه‌ای بین دو نقطه بر روی هر نوع منحنی. در این روش اثبات فرمول سرعت زاویه ای، تحت عنوان سرعت زاویه‌ای در سایت www.p3m.ir اثبات گردیده است و عبارت است از :

$$\tan\omega = \frac{V_{yA}.V_{xB} - V_{xA}.V_{yB}}{V_{xA}.V_{xB} + V_{yA}.V_{yB}}$$

ب : اثبات سرعت زاویه ای متوسط بین چند نقطه روی منحنی: در این روش نیز اثبات فرمول سرعت زاویه‌ای متوسط بین چند نقطه روی منحنی، در سایت www.p3m.ir اثبات گردیده است.

ج : سرع زاویه‌ای لحظه ای در یک نقطه: در این روش چنانچه بنا به تعریف سرعت زاویه‌ای عبارت باشد از حاصل تقسیم سرعت خطی روی منحنی در یک نقطه بر شعاع دوران ، خواهیم داشت $\left(\omega = \frac{V}{R}\right)$ یعنی در صفحه مختصات (oxy) (این روش سرعت زاویه‌ای در واحد تخصصی مهندسی مکانیک تحت عنوان درس «تئوری ماشین» بصورت ترسیمی تدریس می گردد.)
Linear Accelerator

(V) عبارت است از سرعت خطی روی منحنی $V = \sqrt{V^2x + V^2y}$
و (R) در مبحث دینامیک پایدار (بُعد پنجم) در سایت www.p3m.ir اثبات گردیده است. مقدار (R) برابر است با $\overline{o\mathrm{H}}$

$$\overline{o\mathrm{H}} = R \quad , \quad \overline{o\mathrm{H}} = \frac{x \cdot Vy \pm y \cdot Vx}{\sqrt{\boldsymbol{V^2x + V^2y}}}$$

$$\text{Ⓞ} \quad \boldsymbol{\omega = \frac{V}{R} = \frac{\sqrt{V^2x+V^2y}}{x\cdot Vy \pm y\cdot Vx \Big/ \sqrt{V^2x+V^2y}} \Rightarrow \frac{V^2x+V^2y}{x\cdot Vy \pm y\cdot Vx} = \omega}$$

سرعت زاویه‌ای لحظه ای بر روی هر منحنی برابر است با Ⓞ
برای تطبیق دادن سرعت زاویه‌ای لحظه ای (ω) با $\left(\omega = \frac{d\beta}{d\tau}\right)$ در صفحه مختصات (oxy) خواهیم داشت. در مثلثات مسطحه داریم : $\frac{y}{x} = \tan\beta$
از طرفین رابطه دیفرانسیل می‌گیریم $\tan\beta = \frac{y}{x} \Rightarrow (1 + tan^2\beta)\cdot d\beta = \frac{y\cdot dx - x\cdot dy}{x^2}$.
طرفین رابطه را بر $(d\tau)$ تقسیم می نمائیم.

$$(1 + tan^2\beta)\cdot\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{-y\cdot {dx}/{d\tau} + x\cdot {dy}/{d\tau}}{x^2} = \frac{-y\cdot Vx + x\cdot Vy}{x^2}$$

$$(1 + tan^2\beta) = 1 + \cdot\frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)\cdot\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{-y\cdot Vx + x\cdot Vy}{x^2}$$

$$ⓟ\ \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{-y \cdot Vx + x \cdot Vy}{x^2 + y^2}$$

اینک دو فرمول ⓟ و ⓞ سرعت زاویه ای لحظه ای در یک نقطه بر روی منحنی در صفحه مختصات *(oxy)* می باشند . لذا دو فرمول بایستی مساوی یکدیگر باشند.

$$ⓞ\ \frac{V^2x + V^2y}{x \cdot Vy \pm y \cdot Vx} = \frac{-y \cdot Vx + x \cdot Vy}{x^2}\ ⓟ$$

ⓠگزینه منفی⇨ $y^2 - x^2 = 2c$

ⓡگزینه مثبت⇨ $\frac{dy}{dx} = i\sqrt{2 + \frac{x^2}{y^2}}$

ⓢ $y = i.\ x$

ⓣ $\frac{dy}{dx} = i$

فرمول ⓠ، معادله هذلولی می باشد که در طبیعت بصورت منحنی در فضا شکل گیری نموده است. این شکل گیری پس از انفجار نقطه بیگ بنگ بوجود آمده است و چنانچه ستاره‌ای پس از پایان عمر خود انفجاری بوجود آید، شکل موجودیت آن براساس فرمول هذلولی از بین خواهد رفت. هر کهکشان یا ابر خوشه ای شکل حرکتی آن بصورت فرمول ⓠ (هذلولی) می باشد و آن کهکشان یا ابر خوشه و .. از نقطه بیگ بنگ تا بحال سالم و بدون فروپاشی بحرکت گردشی خود ادامه داده مگر انفجاری در کهکشان و ... روش دهد که شکل هذلولی آن شکل بصورت درهم ریخته بوجود آید.
فرمول ⓡ در بعضی از معادلات دیفرانسیل صدق می کند و این فرمول می تواند یکی از ریشه های معادلات دیفرانسیل بحساب آید.