

فرمول برآیند برخورد اجرام ($m_1, m_2, \dots, m_n$ در فضای (xyz)) در یک نقطه

چکیده

در این مقاله فرمول برآیند برخورد اجرام ($m_1, m_2, \dots, m_n$ در فضای (xyz)) محاسبه میگردد و باثبات میرسد. با توجه به اهمیت حرکت اجرام در فضا و برخورد آنها با یکدیگر، این نیاز احساس میگردد که بمنظور طراحی و بهینه سازی سیستم های دینامیکی (مکانیک دینامیک) و تمام زیر مجموعه های آن بایستی رابطه ای مستند ارائه گردد. این مقاله سعی بر آن دارد که رابطه مورد نظر را در ساده ترین حالت ممکن اثبات نماید

واژه های کلیدی

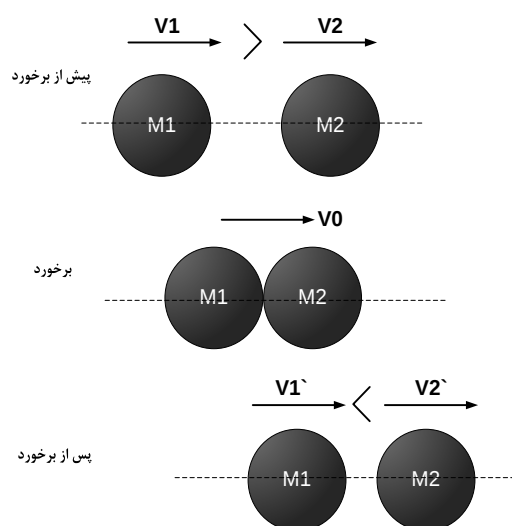
برخورد، نقاط مادی، تنش داخلی

مقدمه

در مباحث مکانیک دینامیک موضوع و مبحث حرکت، مربوط به یک متحرک بحث و اثبات میگردد. بطور مثال پرتاب یک ذره در فضا، برد متحرک، نقطه اوج متحرک، نیرو، جرم و شتاب متحرک بحث میگردد.

اصل ضربه و مومنتوم، کاربردی مهم در تشریح رفتار اجسام در خلال برخورد با یکدیگر دارد. برخورد یعنی تصادف بین دو جسم و مشخصه آن، تولید نیروهای ضربه ای نسبتاً بزرگ در مدت زمان خیلی کوتاه است. لذا حجم اجرام و تنش داخلی اجرام صفر در نظر گرفته شده است.

حرکت همراهی دو گوی به جرمهای M_1 و M_2 را در نظر می گیریم، در حالی که گویها با سرعتهای V_1 و V_2 حرکت می کنند. اگر V_1 بزرگتر از V_2 باشد، تصادف چنان رخ خواهد داد که نیروهای برخورد در امتداد خط مراکز دو گوی واقع شود.



شکل ۱: برخورد دو جرم

از آنجا که در حین برخورد، نیروهای تماس بین دو گوی، مساوی و معکوس یکدیگر هستند، مومنتوم خطی مجموعه

تغییر نمیکند. بنابراین، از قانون بقای مومنتوم خطی نتیجه می شود که: $M_1 V_1 + M_2 V_2 = M_1 V_1' + M_2 V_2'$

فرض می شود که هر نیرویی ، به استثنای نیروهای داخل بسیار بزرگ ناشی از برخورد، که در خلال برخورد برگویها اثر می کنند، به نسبت کوچک باشد به طوری که ضربه ناشی از آنها در مقایسه با ضربه وارده توسط هر یک از نیروهای داخلی برخورد، ناچیز تلقی گردد.

در این مقاله برآیند برخورد اجرام $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ در فضای (xyz) در یک نقطه بصورت فرمول ارائه میگردد که اثبات آن مندرج میباشد و فرمول اثبات شده آن عبارت است از :

$$m \cdot V = \sqrt{(\sum m \cdot V_x)^2 + (\sum m \cdot V_y)^2 + (\sum m \cdot V_z)^2}$$

جرم معادل پس از برخورد اجرام $(m_1, m_2, \dots, m_n)$

سرعت معادل پس از برخورد اجرام $(V_1, V_2, \dots, V_n)$

اجرام $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ بر روی محور طول ها $\sum m \cdot V_x$

جمع جبری مولفه های سرعت

بر روی محور (x)

بر روی محور عرض ها $\sum m \cdot V_y$ $(m_1, m_2, \dots, m_n)$

جمع جبری مولفه های سرعت اجرام

بر روی محور (y)

بر روی محور ارتفاع ها $\sum m \cdot V_z$ $(m_1, m_2, \dots, m_n)$

جمع جبری مولفه های سرعت اجرام

بر روی محور (z)

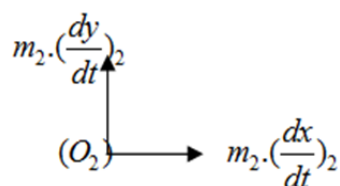
در این مقاله دو جرم m_1 و m_2 را که دارای سرعت V_1 و V_2 می باشد در هنگام برخورد محاسبه می نمائیم. چنانچه در مبداء مختصات oxy دو نقطه O_1 ، O_2 در نظر بگیریم و جرم های m_1 و m_2 را بترتیب در نقاط مزبور در نظر بگیریم خواهیم داشت :

تصویر سرعت (O_1) روی محورهای (y) و (x)

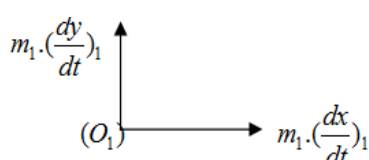
$$O_1 \begin{cases} V_{x_1} = m_1 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \\ V_{y_1} = m_1 \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{V_{y_1}}{V_{x_1}} \\ \frac{V_{y_1}}{V_{x_1}} = \frac{m_1 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_1}{m_1 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_1} \end{cases}$$

تصویر سرعت (O_2) روی محورهای (y) و (x)

$$O_2 \begin{cases} V_{x_2} = m_2 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 \\ V_{y_2} = m_2 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_{y_2}}{V_{x_2}} = \frac{m_2 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_2}{m_2 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_2}$$



برای محاسبه برآیند دو نقطه (O_1) و (O_2) کافیتست بروش زیر عمل نمائیم:



نقاط $(O_1, O_2, \dots, O_n)$ ، نقاط مادی میباشند و دارای هیچگونه تنش داخلی نمی

$$\Sigma m.Vx = m_1 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 + m_2 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_2$$

$$\Sigma m.Vy = m_1 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 + m_2 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_2$$

شایان ذکر است علامت (+) و یا (-) مربوط به مخالف و یا هم جهت بودن سرعتها میباشد و لذا از گذاردن علامت اضافی (±) خودداری شده است.

چنانچه جرم و سرعت برآیند را بترتیب m و V در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$m.V = \sqrt{\frac{2}{\Sigma m.Vx} + \frac{2}{\Sigma m.Vy}} \quad \text{در صفحه مختصات (oxy)}$$

$$m.V = \sqrt{\left[m_1 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 + m_2 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 \right]^2 + \left[m_1 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 + m_2 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_2 \right]^2}$$

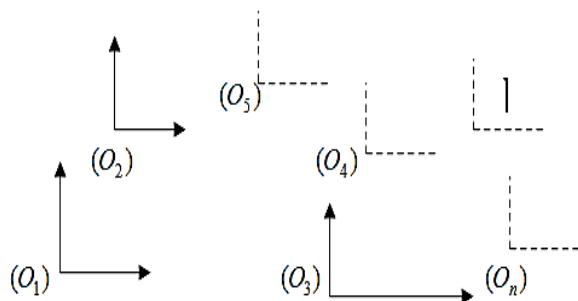
با بدست آمدن فرمول حالت خاص آنرا بررسی مینمائیم.

حالت خاص: چنانچه دو نقطه (O_1) و (O_2) پس از برخورد حالت سکون داشته باشد برآیند آنها برابر صفر خواهد بود

$$m.V = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\Sigma m.Vx} + \frac{2}{\Sigma m.Vy}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\Sigma m.Vx} + \frac{2}{\Sigma m.Vy} = 0$$

$$\left[m_1 \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 + m_2 \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 \right]^2 + \left[m_1 \left(\frac{dy}{dt} \right)_1 + m_2 \left(\frac{dy}{dt} \right)_2 \right]^2 = 0$$

حال چنانچه در مبدا مختصات (oxy) بجای دو نقطه (O_1) و (O_2) تعداد نقاط متعدد زیادی داشته باشیم:



$$\Sigma m.Vx = m_1 \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 + m_2 \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 + m_3 \left(\frac{dx}{dt} \right)_3 + \dots + m_n \left(\frac{dx}{dt} \right)_n$$

$$\Sigma m.Vy = m_1 \left(\frac{dy}{dt} \right)_1 + m_2 \left(\frac{dy}{dt} \right)_2 + m_3 \left(\frac{dy}{dt} \right)_3 + \dots + m_n \left(\frac{dy}{dt} \right)_n \quad m.V = \sqrt{\Sigma m.Vx^2 + \Sigma m.Vy^2}$$

با بدست آوردن مقادیر $\Sigma m.Vx$ و $\Sigma m.Vy$ میتوان مقادیر را در فرمول

$$m.V = \sqrt{\Sigma m.Vx^2 + \Sigma m.Vy^2}$$

گذاشت و برآیند کلی را بدست آورد. چنانچه در نظر داشته باشیم که پس از برخورد $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ جسم در حال تعادل باشد و حالت سکون داشته باشد خواهیم داشت:

$$m.V = \sqrt{\Sigma m.Vx^2 + \Sigma m.Vy^2} = 0$$

$$\Sigma m.Vx + \Sigma m.Vy = 0$$

اینک نقاط $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ را در سه بعد (xyz) بررسی و محاسبه می نماییم.

$$m.V = \sqrt{\Sigma m.Vx^2 + \Sigma m.Vy^2 + \Sigma m.Vz^2}$$

$$\Sigma m.Vx = m_1 \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 + m_2 \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 + m_3 \left(\frac{dx}{dt} \right)_3 + \dots + m_n \left(\frac{dx}{dt} \right)_n$$

$$\Sigma m.Vy = m_1 \left(\frac{dy}{dt} \right)_1 + m_2 \left(\frac{dy}{dt} \right)_2 + m_3 \left(\frac{dy}{dt} \right)_3 + \dots + m_n \left(\frac{dy}{dt} \right)_n$$

میتوان $\Sigma m.V_z, \Sigma m.V_y, \Sigma m.V_x$ با بدست آوردن مقادیر $\Sigma m.V_z = m_1 \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 + m_2 \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)_2 + m_3 \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)_3 + \dots + m_n \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)_n$

مقادیر را در فرمول $m.V = \sqrt{\frac{\Sigma m.V_x^2}{2} + \frac{\Sigma m.V_y^2}{2} + \frac{\Sigma m.V_z^2}{2}}$ گذاشت و برآیند کلی را بدست آورد. چنانچه در نظر

داشته باشیم که پس از برخورد نقاط $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ جسم در حال تعادل باشد و حالت سکون داشته باشد خواهیم داشت:

$$m.V = \sqrt{\frac{\Sigma m.V_x^2}{2} + \frac{\Sigma m.V_y^2}{2} + \frac{\Sigma m.V_z^2}{2}} = 0$$

$$\frac{\Sigma m.V_x^2}{2} + \frac{\Sigma m.V_y^2}{2} + \frac{\Sigma m.V_z^2}{2} = 0$$

نتیجه گیری و جمع بندی

همان طور که دیده شد، سرعت برآیند مجموعه ذراتی که در فضای دو بعدی به صورت همزمان با یکدیگر برخورد می کنند با استفاده از قانون پایستگی انرژی بدست آمد که در ادامه به حالت سه بعدی هم تعمیم یافته است. فرمول نهایی بدست آمده امکان پیش بینی سرعت برآیند مجموعه ذراتی را که در فضای سه بعدی به صورت همزمان با یکدیگر برخورد میکنند، فراهم می سازد.