

سرعت زاویه ای

در این مقاله فرمول سرعت زاویه ای بر روی هر نوع منحنی به اثبات رسیده است. با توجه به اهمیت محاسبه سرعت زاویه ای در اکثر علوم کاربردی نظیر مکانیک دینامیک، هوا-فضا، سیستم های دینامیکی و عدم وجود رابطه اثبات شده در این زمینه، این نیاز احساس می گردد که به منظور طراحی بهینه سازی سیستم های دینامیکی بایستی رابطه ای مستدل ارائه گردد. این مقاله سعی بر آن دارد که رابطه مورد نظر را در ساده ترین حالت ممکن اثبات نماید

واژه های کلیدی: سرعت زاویه ای

مقدمه

سرعت زاویه ای بر روی هر منحنی: در کتب مکانیک دینامیک تعریف سرعت زاویه ای این طور آمده است: زاویه ای که متحرک در واحد زمان طی می نماید، سرعت زاویه ای می نامند و واحد سرعت زاویه ای عبارت است از رادیان بر ثانیه (Rad/Sec)

فرمول سرعت زاویه ای عبارت است از: $V=R.\omega$

که در فرمول فوق (V) عبارت است از سرعت خطی بر روی منحنی و (R) شعاع دوران حول محور دوران و (ω) سرعت زاویه ای متحرک.

در این مقاله سرعت زاویه ای بر روی هر نوع منحنی را بررسی می نماییم (منحنی بسته و منحنی باز). ابتدا سرعت زاویه ای بر روی منحنی بسته را بررسی می نماییم، در منحنی بسته دو شکل هندسی مشخصه موجود بوده که رایج می باشد.

یکی دایره و دیگری بیضی. و در منحنی باز هر نوع منحنی که ابتدا و انتهای آن به یکدیگر متصل نشود را شامل می شود.

اینک در آغاز، منحنی بسته را بررسی می نماییم، نخست در دایره

سرعت زاویه ای در دایره شامل دو بخش می شود

الف: سرعت زاویه ای در دایره با سرعت خطی ثابت

نظر به اینکه سرعت خطی (V) در دایره ثابت بوده و شعاع دایره (R) نیز ثابت می باشد لذا سرعت زاویه ای نیز ثابت خواهد بود

$$V=R.\omega$$

بنابراین تمام زوایای طی شده در واحدهای زمانی مساوی $\omega = V/R = \text{cte}$ خواهد بود.

ب: سرعت زاویه ای در دایره با سرعت خطی غیر ثابت (متغیر):

نظر به اینکه سرعت خطی (V) در دایره ثابت نمی باشد ولی شعاع دایره (R) ثابت است لذا سرعت زاویه ای غیر ثابت خواهد بود، بنابراین خواهیم داشت :

$$R = m \text{ (متر) شعاع دایره}$$

$$\omega = \frac{V}{R} \text{ Rad/sec}$$

$$V = m/sec \text{ (متر بر ثانیه) سرعت خطی}$$

$$V = R * \omega$$

$$dV = R * d\omega$$

اینک با توجه به شکل (۱) می توان بیان نمود که متحرک از نقطه (A) تا نقطه (B) را در واحد زمان طی نموده یعنی زاویه (α) و از نقطه (B) تا نقطه (C) را در واحد زمان دیگری طی نموده است یعنی زاویه (β).
زاویه (α) با زاویه (β) مساوی نخواهد بود.
بنابراین می توان نتیجه گرفت که تمام زوایای طی شده در واحدهای زمانی مساوی نخواهد بود یعنی در هر واحد زمانی زاویه ای طی خواهد نمود که بستگی به تغییرات سرعت خطی خواهد داشت.
سرعت زاویه ای در بیضی :

چنانچه مرکز بیضی را محور دوران در نظر بگیریم و متحرک طوری حرکت نماید که دارای سرعت زاویه ای ثابت باشد

$$V = R * \omega$$

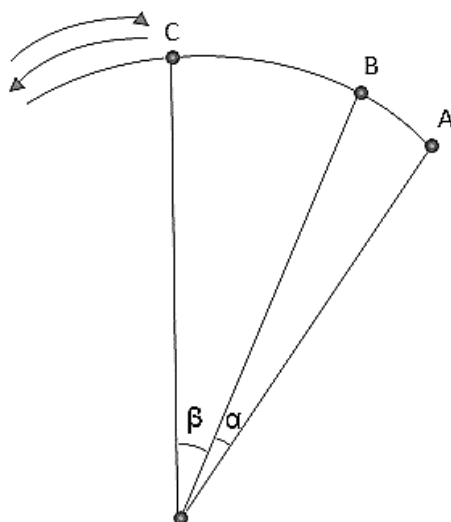
را با توجه به آنکه شعاع دوران و سرعت خطی متغیر می باشد بررسی نمود:

$$dV = R * d\omega + \omega.dR = 0 + \omega.dR$$

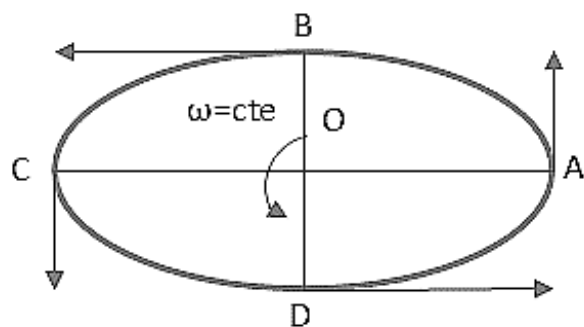
مطابق شکل (۲) زوایای طی شده با هم برابر هستند ولی با توجه به شکل

می توان نتیجه گرفت که تغییرات سرعت خطی با تغییرات شعاع دوران متناسب است.

اینک سرعت زاویه ای را بر روی منحنی باز بررسی می نماییم و فرمول سرعت زاویه ای به اثبات می رسد.



شکل شماره ۱



شکل شماره ۲

در این مقاله زاویه ای که متحرک در واحد زمان طی مینماید (γ) میباشد یعنی متحرک بر روی منحنی از نقطه (A) تا نقطه (B) را در واحد زمان طی نموده همان زاویه (γ) میباشد. بنابراین زاویه طی شده در واحد زمان برابر (γ) می باشد. (مطابق شکل ۳)

$$\omega = (\gamma . t)$$

$$t = 1$$

$$\omega = (\gamma . 1) = (\gamma)$$

در مثلث OCH داریم

$$\gamma + \beta + \pi - \alpha = \pi$$

$$\gamma + \beta = \alpha$$

$$\gamma = \alpha - \beta$$

توضیح اینکه زاویه (γ) ممکن است $\gamma = \alpha \mp \beta$ باشد. بستگی به سرعت هم جهت یا خلاف جهت یکدیگر دارد.

$$V_{xA} = \text{m/sec (A) سرعت روی محور طول ها در نقطه}$$

$$V_{yA} = \text{m/sec (A) سرعت روی محور عرض ها در نقطه}$$

$$V_{xB} = \text{m/sec (B) سرعت روی محور طول ها در نقطه}$$

$$V_{yB} = \text{m/sec (B) سرعت روی محور عرض ها در نقطه}$$

فرمول اثبات شده آن عبارت است از :

$$\tan \omega = \frac{V_{yA} \cdot V_{xB} - V_{xA} \cdot V_{yB}}{V_{xA} \cdot V_{xB} + V_{yA} \cdot V_{yB}}$$

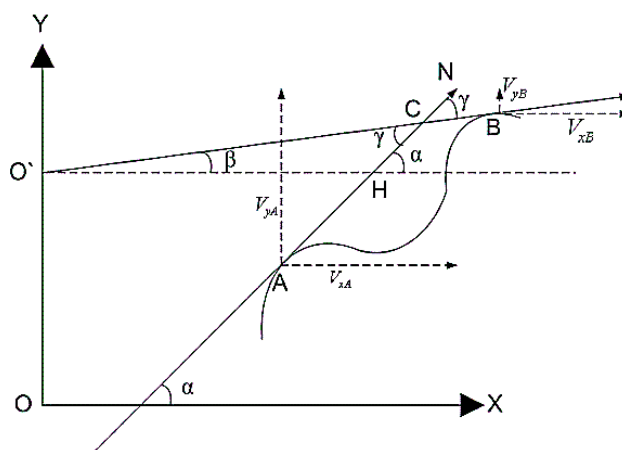
$$\tan \alpha = \frac{V_{yA}}{V_{xA}}$$

$$\tan \beta = \frac{V_{yB}}{V_{xB}}$$

$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta)$$

$$\tan \gamma = \tan \omega = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{V_{yA}}{V_{xA}} - \frac{V_{yB}}{V_{xB}}}{1 + \frac{V_{yA} \cdot V_{yB}}{V_{xA} \cdot V_{xB}}}$$

$$\tan \omega = \frac{V_{yA} \cdot V_{xB} - V_{xA} \cdot V_{yB}}{V_{xA} \cdot V_{xB} + V_{yA} \cdot V_{yB}}$$



شکل شماره ۳

در شکل شماره ۳ چنانچه متحرک در ثانیه بعدی از نقطه (B) به نقطه ای فرضی مانند (D) برسد، سرعت زاویه ای متحرک در ثانیه بعدی تعریف خواهد شد و فرمول سرعت زاویه ای در ثانیه بعدی بین دو نقطه (D) و (B) مطابق فرمول ارائه شده بین دو نقطه (B) و (A) صادق می باشد. شایان ذکر است فرمول فوق برای هر واحد زمانی به اثبات رسیده است. به طور مثال متحرک در ثانیه (t_n) در نقطه ای مانند (A) از منحنی می باشد و در ثانیه (t_{n+1}) در نقطه ای مانند (B) می باشد، لذا فرمول اثبات شده فوق بین دو نقطه در واحد زمان (t_n) و (t_{n+1}) صادق می باشد و همین طور بین دو نقطه (D) و (B) و در ثانیه (t_{n+1}) و (t_{n+2}) و ... صادق می باشد.

چنانچه سرعت زاویه ای بزرگتر از یک ثانیه را در نظر بگیریم زاویه طی شده به طور متوسط می باشد و سرعت زاویه ای متوسط گزینه جداگانه ای می باشد که در ادامه توضیح داده می شود.

مثال: چنانچه متحرکی روی منحنی در ثانیه اول $(\alpha = \frac{\pi}{4})$ طی نماید و در ثانیه بعدی $(\beta = \frac{\pi}{6})$ طی نماید. برای به دست آوردن سرعت زاویه ای متوسط، دو زاویه (α) و (β) را می توان با هم جمع نمود و تقسیم بر ۲ نمود $(\frac{(\alpha+\beta)}{2})$. سرعت زاویه ای متوسط به دست می آید.

$$\frac{(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})}{2} = \frac{20\pi}{96} = \frac{5\pi}{24}$$

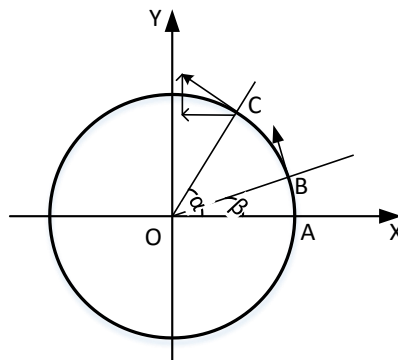
حال می توان نتیجه گرفت که سرعت زاویه ای، با سرعت زاویه ای متوسط متفاوت می باشد و نمی توان از سرعت زاویه ای متوسط به سرعت زاویه ای رسید و فقط هر کدام گزینه جدا از هم می باشند. سرعت زاویه ای برای دو نقطه متوالی که به فاصله یک ثانیه از یکدیگر قرار دارند به اثبات رسیده است یعنی در زمان بین (t_n) و (t_{n+1}) سرعت زاویه ای به دست می آید. فرمول اثبات شده بر روی منحنی باز، در منحنی بسته نیز صادق می باشد. با ذکر یک مثال می توان صحت فرمول فوق را در منحنی بسته به اثبات رسید.

در دایره شکل (۴) متحرکی با سرعت خطی ثابت در حرکت می باشد و دارای شعاع دوران ثابت (R) می باشد. سه نقطه (C) و (B) و (A) را روی دایره در نظر می گیریم. به طوری که

$$\widehat{AOC} = \alpha \text{ و } \widehat{AOB} = \beta$$

به طوری که متحرک از نقطه (A) تا (B) را در یک ثانیه طی می نماید و از نقطه (A) تا (C) را در دو ثانیه طی می نماید یعنی از نقطه (B) تا (C) در ثانیه دوم و یا زمان طی شده در قوس $\widehat{AB}$ برابر (t_n) و زمان طی شده در قوس $\widehat{AC}$ برابر (t_{n+1}) باشد.

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ و } \beta = \frac{\pi}{4}$$



حال با توجه به مختصات نقاط (B) و (C) می توان نوشت

$$\begin{aligned} -V_{xB} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V \\ V_{yB} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V \\ -V_{xC} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V \\ V_{yC} &= \frac{1}{2} \cdot V \\ \omega = \gamma = \alpha - \beta &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \\ \tan \alpha &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\tan \beta = -1$$

$$\tan \omega = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\sqrt{3} - (-1)}{1 + (-\sqrt{3})(-1)}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

با توجه به اینکه تصویر بردار $\frac{\pi}{12}$ در ربع اول می باشد و بردار $V_{x\frac{\pi}{12}}$ منفی می باشد لذا رابطه زیر برقرار می شود.

$$\frac{V_{y\frac{\pi}{12}}}{-V_{x\frac{\pi}{12}}} = -\tan \frac{\pi}{12} = -\tan \frac{\pi}{12} = -\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

در صورتی که جهت حرکت متحرک در جهت حرکت مثلثاتی باشد جدول زیر صادق می باشد.

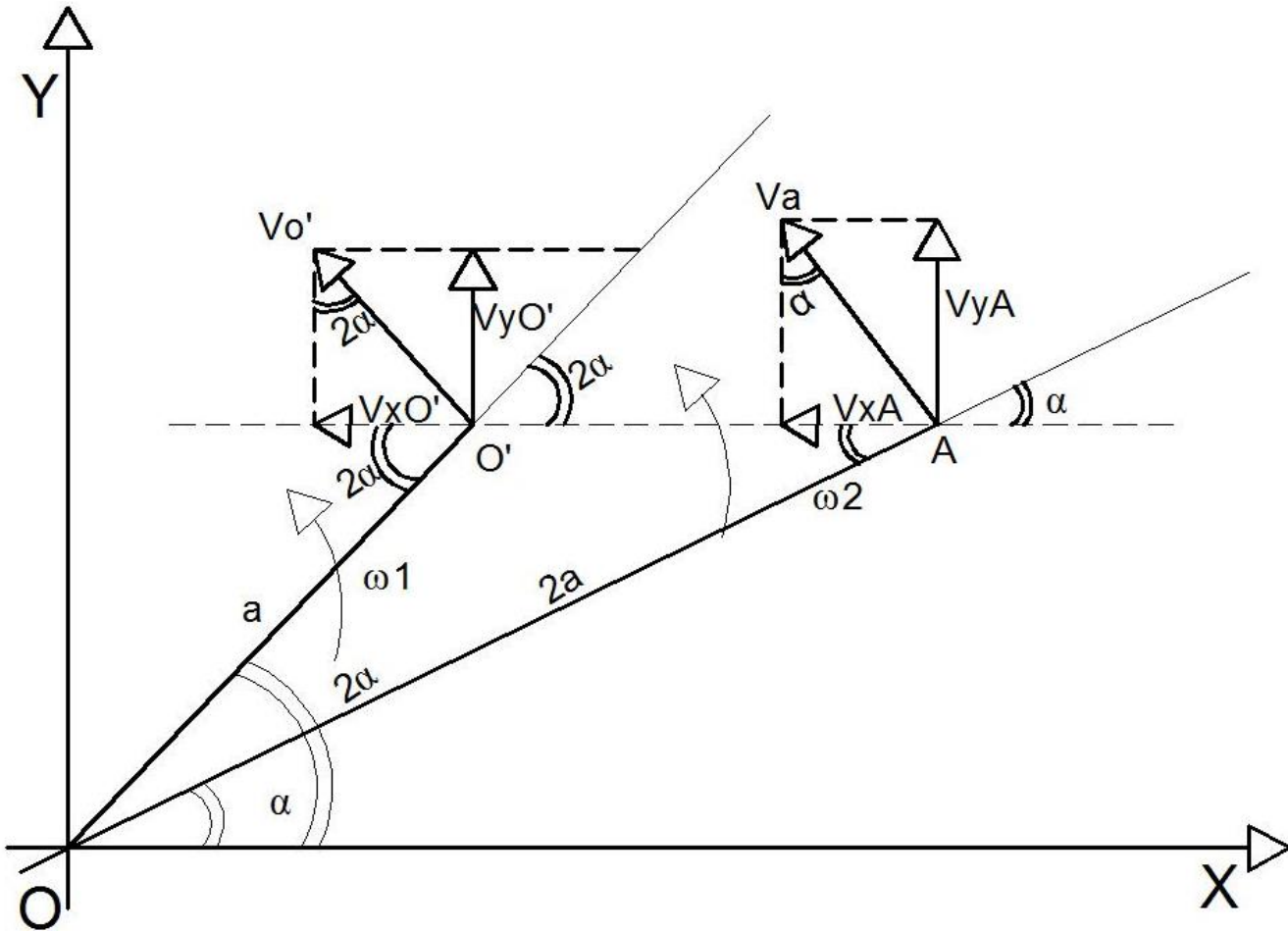
ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم	
$-V_x$	$-V_x$	$+V_x$	$+V_x$	تصویر بردار متحرک روی محور x
$+V_y$	$-V_y$	$-V_y$	$+V_y$	تصویر بردار متحرک روی محور y

فصل ششم

تمرین اول

تمرین اول:

دو رابط $\overline{O O'}$ و $\overline{O A}$ با مشخصات زیر در جهت دایره مثلثاتی در حال دوران می باشد و نقطه (A) حول نقطه (O) با سرعت زاویه ای ثابت (ω_2) در حال دوران می باشد و نقطه (O') حول نقطه (O) با سرعت زاویه ای ثابت (ω_1) در حال دوران می باشد



$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = C_1 = cte \\ \omega_2 = C_2 = cte \end{array} \right\} \text{سرعت زاویه ای ثابت } \omega_2$$

$$\overline{O O'} = a \Rightarrow \overline{O A} = 2.a$$

مطلوب است :

۱- سرعت خطی: $V_{O'} = ?$

۲- سرعت خطی ($V_A = ?$)

۳- سرعت زاویه ای مربوط به رابطه (O' A) در زمان بین (t) و (t+1) براساس فرمول صفحه ۳۶.

حل :

$$V_{O'} = O O' * \omega_1 = a. \omega_1 \Rightarrow V_{O'} = a. \omega_1$$

$$V_A = O A * \omega_2 = 2.a. \omega_2 \Rightarrow V_A = 2.a. \omega_2$$

می دانیم رابطه دو سرعت زاویه ای عبارت است از $(\omega_1 = 2. \omega_2)$ و میدانیم زاویه حرکت نقطه (A) نسبت به محور مثبت (X) زاویه (α) می باشد و نقطه (O') نسبت به محور مثبت (X) زاویه (2α) تشکیل می دهد. بنابراین $\widehat{O'OA}$ زاویه برابر (α) خواهد بود. زاویه (α) ، زاویه ای است که نقطه (A) در واحد زمان طی می نماید، بنابراین $(\omega_2 = \alpha.t = \alpha.1)$ و همینطور در مورد نقطه (O')، زاویه (2α) را در واحد زمان طی می نماید یعنی $(\omega_1 = 2.\alpha.t = 2.\alpha.1)$. در واحد زمان نقطه (A)، زاویه (α) را طی مینماید و نقطه (O') زاویه (2α) را طی می نماید در همین واحد زمان.

زاویه ای که نقطه (A) نسبت به نقطه (O') طی می نماید برابر زاویه (β) خواهد بود و لذا برای بدست آوردن زاویه (β) می توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$\operatorname{tg} \beta = y' = \frac{V_{yA} - V_{yO'}}{V_{xA} - V_{xO'}} = \frac{V_A \cos \alpha - V_{O'} \cos 2\alpha}{V_A \sin \alpha - V_{O'} \sin 2\alpha} = \frac{2a\omega_2 \cos \alpha - a\omega_1 \cos 2\alpha}{2a\omega_2 \sin \alpha - a\omega_1 \sin 2\alpha}$$

با داشتن $(\omega_1 = 2. \omega_2)$ میتوان نوشت

$$\operatorname{tg} \beta = y' = \frac{2.a.\omega_2 \cos \alpha - 2.a.\omega_2 \cos 2\alpha}{2.a.\omega_2 \sin \alpha - 2.a.\omega_2 \sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} \beta = y' = \frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha}$$

اینک با مشخص شدن زاویه (β) می توان سرعت زاویه ای مربوط به دو نقطه (A) و (O') را بدست آورد. یعنی $(\omega = \beta.t = \beta.1)$ اما این سرعت زاویه ای در هر لحظه متغیر می باشد بدلیل آنکه زاویه (β) در لحظه (t) با زاویه (β) در لحظه (t+1) متفاوت خواهد بود.

اینک برای بدست آوردن $\overline{O'A}$ می توان از مثلث $\widehat{O'OA}$ طول $\overline{O'A}$ را بدست آورد.

در مثلث (O'OA) داریم، دو ضلع و زاویه بین مشخص می باشد، بنابراین طول $\overline{O'A}$ را می توان بدست آورد.

$$(\overline{O'A})^2 = (\overline{O'O})^2 + (\overline{OA})^2 - 2(\overline{O'O}).(\overline{OA}).\cos \alpha$$

$$(\overline{O'A})^2 = a^2 + (2a)^2 - 2(a).(2a).\cos \alpha$$

$$(\overline{O'A})^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos \alpha = a^2(5 - 4 \cos \alpha)$$

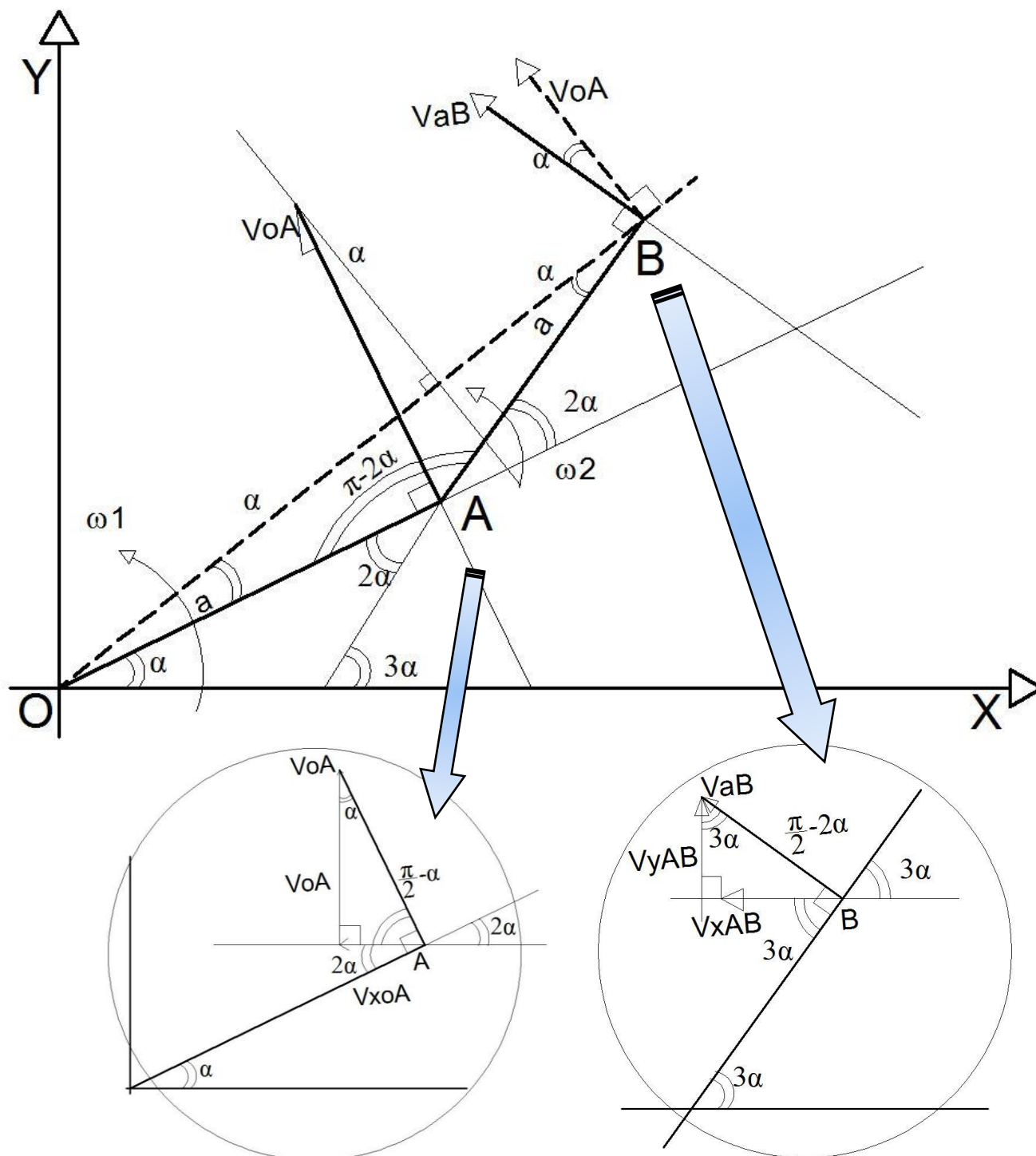
$$\overline{O'A} = a \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$$

فصل ششم

تمرین دوم

تمرین دوم:

دو رابط (OA) و (AB) مطابق شکل بهم متصل می باشند. نقطه (A) حول نقطه (O) با سرعت زاویه ای ثابت (ω_1) در دوران می باشد و نقطه (B) حول نقطه (A) با سرعت زاویه ای ثابت (ω_2) در دوران می باشد.



$$V_{xoA} = V_{oA} \cdot \sin \alpha$$

$$V_{yoA} = V_{oA} \cdot \cos \alpha$$

$$V_{xab} = V_{aB} \cdot \sin 3\alpha$$

$$V_{yab} = V_{aB} \cdot \cos 3\alpha$$

$$\omega_2 = 2\omega_1 \quad , \quad \overline{OA} = \overline{AB} = a$$

مطلوب است سرعت خطی $V_{OA} = ?$ ، $V_{AB} = ?$ ، $V_{OB} = ?$ و سرعت زاویه ای نقطه (B) حول نقطه (O)

$$V_{OA} = \omega_1 . a \quad , \quad V_{AB} = \omega_2 . a = 2 . \omega_1 . a$$

$$V_{OA} = \sqrt{(V_{xOA})^2 + (V_{yOA})^2} = \sqrt{(V_{OA} \cdot \sin \alpha)^2 + (V_{OA} \cdot \cos \alpha)^2} \quad \text{حل :}$$

$$V_{AB} = \sqrt{(V_{xAB})^2 + (V_{yAB})^2} = \sqrt{(V_{AB} \cdot \sin 3\alpha)^2 + (V_{AB} \cdot \cos 3\alpha)^2}$$

$$\frac{V_{OA}}{V_{AB}} = \frac{\omega_1 . a}{2 . \omega_1 . a} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{AB} = 2V_{OA}$$

سرعت زاویه ای نقطه (B) حول نقطه (O) عبارت است از زاویه (β) در واحد زمان $\omega = \beta . t = \beta . 1$

$$\tan(\beta) = \frac{V_{yAB} \pm V_{yOA}}{V_{xAB} \pm V_{xOA}}$$

علامت $(\pm)$ بستگی به جهت سرعت ها در دایره مثلثاتی دارد .

برای محاسبه سرعت زاویه بین زمان (t) و $(t+1)$ می توان از فرمول صفحه (۳۶) استفاده نمود .

فصل ششم

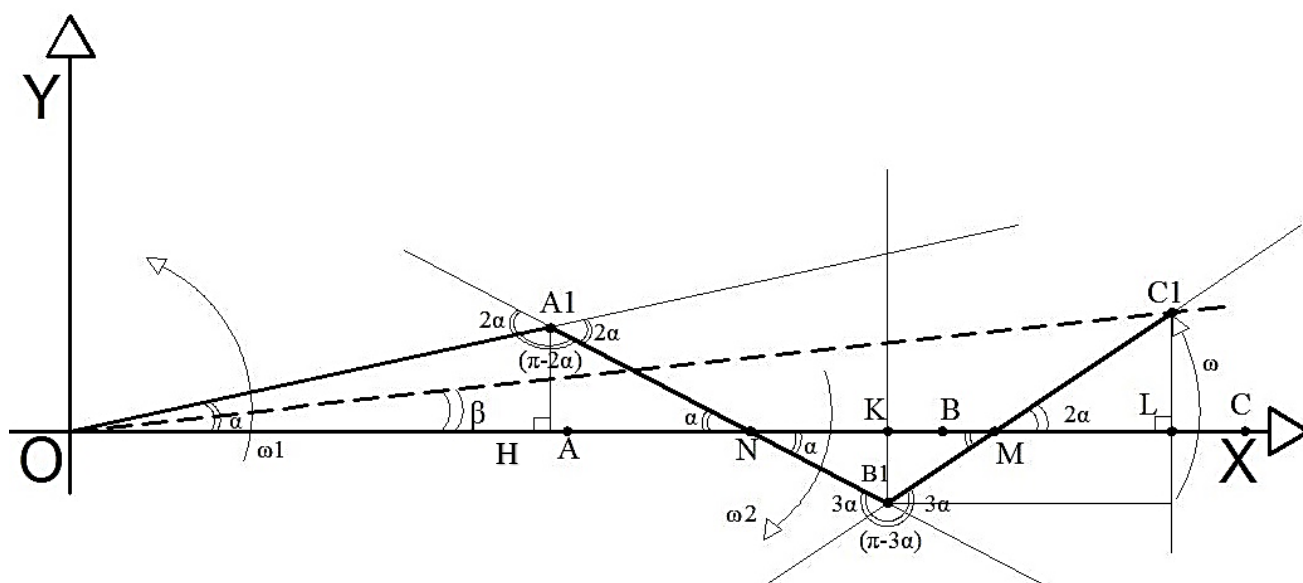
تمرین سوم

تمرین سوم:

سه رابط ($\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$) مطابق شکل دارای حرکت دورانی است. نقطه (A) حول نقطه (O) دارای سرعت زاویه ای ($\omega_1 = \text{cte}$) می باشد. نقطه (B) حول نقطه (A) دارای سرعت زاویه ای ($\omega_2 = \text{cte}$) می باشد، نقطه (C) حول نقطه (B) دارای سرعت زاویه ای ($\omega_3 = \text{cte}$) می باشد. با توجه به روابط زیر سرعت زاویه ای نقطه (C) را نسبت به نقطه (O) در ثانیه اول بدست آورید:

$$\omega_1 = \alpha, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_2 = 2\alpha, \omega_3 = 3\omega_1, \omega_3 = 3\alpha$$

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = a$$



حل: ابتدا فرض می نماییم در هنگام دوران و در لحظه ($t=0$) نقاط (O, A, B, C) در یک امتداد خطی قرار گرفته باشند و در لحظه ($t=1$) نقاط (A) به (A1) و (B) به (B1) و (C) به (C1) منتقل شوند.

بنابراین سرعت زاویه ای نقطه (C1) نسبت به نقطه (O) در ثانیه اول یعنی بین زمان ($t=0$, $t=1$) برابر زاویه (β) خواهد بود.

حال برای بدست آوردن زاویه (β) کافی است مختصات نقطه (C1) را بدست آوریم و سپس از رابطه ($\tan \beta = \frac{Y_{C1}}{X_{C1}}$) زاویه (β) را بدست آورد.

$$X_{C1} = \overline{OL} = \overline{OH} + \overline{HN} + \overline{NK} + \overline{KM} + \overline{ML}$$

$$\overline{OH} = a \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{HN} = a_1 \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{NK} = a_2 \cdot \cos \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \overline{HN} \\ \overline{NK} \end{array} \right\} \overline{HN} + \overline{NK} = (a_1 + a_2) \cos \alpha = a \cos \alpha$$

$$\overline{KM} = a_3 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\overline{ML} = a_4 \cdot \cos 2\alpha \quad \left. \begin{array}{l} \overline{KM} \\ \overline{ML} \end{array} \right\} \overline{KM} + \overline{ML} = (a_3 + a_4) \cos 2\alpha = a \cos 2\alpha$$

$$X_{C1} = \overline{OL} = a \cdot \cos \alpha + a \cos \alpha + a \cos 2\alpha = 2a \cos \alpha + a \cos 2\alpha$$

$$X_{C1} = a (2 \cos \alpha + \cos 2\alpha)$$



اینک برای بدست آوردن (Y_{C1}) بایستی $(C1L)$ را بدست آوریم . بنابراین برای محاسبه اندازه $(C1L)$ از مثلث $(\overline{OHA1})$ اندازه $A1H$ را بدست می آوریم $(A1H = Y_{A1})$ بنابراین مختصات نقطه $A1$ مشخص می باشد .

حال با داشتن مختصات نقطه $(A1)$ و ضریب زاویه خط $(\pi-\alpha)$ معادله خط $(A1B1)$ را می توان نوشت سپس طول (OK) را در معادله خط $(A1B1)$ قرار داده تا عرض نقطه $(B1)$ بدست آید .

$$\begin{array}{l} \text{A1} \quad \begin{array}{l} X_{a1} = OH \\ Y_{a1} = A1H \end{array} \\ \text{B1} \quad \begin{array}{l} X_{b1} = OK \\ Y_{b1} \end{array} \end{array}$$

اینک با داشتن مختصات نقطه $(B1)$ و ضریب زاویه خط (2α) می توان معادله خط $(B1C1)$ بدست می آید . سپس طول (X_{C1}) $(OL = \text{را در معادله خط } (B1C1) \text{ قرار می دهیم تا عرض نقطه } (C1) \text{ بدست آید . حال با مشخص شدن طول و عرض نقطه } (C1) \text{ زاویه } (\beta) \text{ نیز معلوم خواهد شد و با مشخص شدن } (Y_{C1}) \text{ و } (X_{C1}) \text{ می توان نوشت } \tan(\beta) = \frac{Y_{C1}}{X_{C1}} \text{ و در این صورت زاویه } (\beta) \text{ معلوم می گردد. چنانچه سرعت زاویه ای نقطه } (C1) \text{ را نسبت به نقطه } (O) \text{ در ثانیه دوم بخواهیم بایستی مسئله را از اول بصورت}$

$$\omega_1 = 2\alpha, \omega_2 = 4\alpha, \omega_3 = 6\alpha$$

حل نموده و چنانچه در این مسئله بخواهیم سرعت زاویه ای نقطه $(C1)$ را نسبت به نقطه (O) در ثانیه (n) بدست آوریم بایستی مسئله را از اول بصورت $\omega_1 = n.\alpha, \omega_2 = n(2\alpha), \omega_3 = n(3\alpha)$ حل نماییم.

$$\omega_1 = \frac{241\pi}{6} = 40\pi + \frac{\pi}{6} = 20(2\pi) + \frac{\pi}{6}$$

$$\omega_2 = 2 \omega_1 = \frac{482\pi}{6} = 80\pi + \frac{2\pi}{6} = 80\pi + \frac{\pi}{3} = 40(2\pi) + \frac{\pi}{3}$$

$$\omega_3 = 3 \omega_1 = \frac{723\pi}{6} = 120\pi + \frac{3\pi}{6} = 120\pi + \frac{\pi}{2} = 60(2\pi) + \frac{\pi}{2}$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{OH} = 10 \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\overline{HN} + \overline{NK} = a \cdot \cos \alpha = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\overline{KM} + \overline{ML} = a \cdot \cos 2\alpha = 10 \cos \frac{\pi}{3} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$X_{C1} = \overline{OL} = 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 5 = 10\sqrt{3} + 5$$

$$\text{A1} \quad \begin{array}{l} OH = 5\sqrt{3} \\ A1H = 10 \sin \frac{\pi}{6} = 5 \end{array}$$

با داشتن مختصات نقطه $A1$ $\frac{5\sqrt{3}}{5}$ می توان معادله خط $(A1B1)$ را با ضریب زاویه $\tan(\pi-\alpha)$ نوشت

$$M = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$Y - Y_1 = m(X - X_1) \Rightarrow Y - 5 = \frac{-\sqrt{3}}{3}(X - 5\sqrt{3})$$

$$Y - 5 = \frac{-\sqrt{3}}{3}X + 5 = \frac{-\sqrt{3}}{3}X + 5$$

$$Y = \frac{-\sqrt{3}}{3}X + 5 + 5 = \frac{-\sqrt{3}}{3}X + 10$$

با قرار دادن طول نقطه $(X_{B1}=OK=10\sqrt{3})$ در معادله خط $(A1B1)$ عرض نقطه $(B1)$ بدست می آید یعنی :

$$Y = \frac{-\sqrt{3}}{3} \cdot (10\sqrt{3}) + 10 = -10 + 10 = 0$$

$$Y_{B1}=0 \Rightarrow B1 \begin{vmatrix} 10\sqrt{3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

اینک با داشتن مختصات نقطه $(B1)$ و ضریب زاویه $m=\tan(2\alpha)$ میتوان معادله خط $(B1C1)$ را نوشت

$$m = \tan\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$Y + 0 = \sqrt{3}(X - 10\sqrt{3}) = \sqrt{3}X - 30$$

$$Y = \sqrt{3}X - 30 - 0 = \sqrt{3}X - 30$$

حال با قرار دادن طول نقطه $(C1)$ در معادله فوق ، عرض نقطه $(C1)$ بدست خواهد آمد

$$X_{C1} = \overline{OL} = 10\sqrt{3} + 5, \quad Y = \sqrt{3}(10\sqrt{3} + 5) - 30 = 30 + 5\sqrt{3} - 30$$

$$Y = 0 + 5\sqrt{3}, \quad Y_{C1} = 0 + 5\sqrt{3}$$

اینک با بدست آمدن مختصات $(C1)$ می توان از رابطه زیر زاویه (β) را بدست آورد

$$\tan(\beta) = \frac{Y_{C1}}{X_{C1}} = \frac{0 + 5\sqrt{3}}{10\sqrt{3} + 5} = \frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3} + 5} = \frac{50 \cdot 3 - 25\sqrt{3}}{300 - 25} = \frac{150 - 25\sqrt{3}}{275}$$

$$\tan(\beta) = 0.3879$$

حالت خاص مسئله فوق را با شکل‌های زیر در ثانیه اول و در ثانیه دوم حل نمائید

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$\omega_1 = \frac{241\pi}{6} \quad \omega_2 = \frac{482\pi}{6} \quad \omega_3 = \frac{723\pi}{6}$$

حال خاص مسئله فوق را با شکل‌های زیر در ثانیه اول و در ثانیه دوم و با مفروضات زیر حل نمائید

$$OA = 4a = 40 \text{ cm} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{12}$$

$$AB = 2a = 20 \text{ cm} \quad \omega_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$BC = a = 10 \text{ cm} \quad \omega_3 = \frac{\pi}{3}$$

