

مبداء مختصات متحرک :

مبداء مختصات در علوم پایه (ریاضیات، فیزیک، مکانیک و ..) همیشه ثابت بوده و روابط موجود بر

اساس مبداء مختصات ثابت، اثبات می گردد

اینک روابط و فرمولهای موجود در ریاضیات را در مبداء مختصات متحرک بررسی می نمائیم و چونکه مبداء مختصات متحرک می باشد و در مبداء مختصات پارامتری بعنوان پارامتر سرعت مطرح می گردد، بنابراین روابط و فرمولهای موجود در علم ریاضیات را می توان در علم فیزیک، مکانیک، ریاضیات مطرح نمود. قبل از اینکه مبداء مختصات متحرک را مورد بررسی قرار دهیم لازم است پیش نیاز گزینه (۱) و (۲) مورد مطالعه قرار گیرد.

۱- در ریاضیات معادله دیفرانسیل $f(x,y,z,y',z')=0$ مفروض است.

معادله دیفرانسیل فوق ابتدا بایستی معادله دیفرانسیل را حل نمائیم و سپس معادله حل شده را کاربردی نمود (در مبحث قبل بررسی شده است)

اینک با توجه به پارامتر سرعت که در روابط و فرمول ریاضیات وارد گردیده، می توانیم معادله دیفرانسیل فوق را قبل از اینکه حل نمائیم بصورت مستقیم کاربردی نمائیم.

در معادلات دیفرانسیل فوق می توان نوشت.

چنانچه صورت و مخرج فرمولهای (۱) و (۲) را بر (dt) تقسیم نمائیم خواهیم داشت :

$$1) \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$2) \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

$$(1) \quad y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$(2) \quad z' = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

در روابط فوق می توان مشاهده نمود که صورت و مخرج کسر دو پارامتر سرعت می باشد. تغییرات

مسافت نسبت به تغییرات زمان برابر سرعت می باشد.

$$\frac{dx}{dt} = V_x \text{ سرعت روی محور } x$$

$$\frac{dy}{dt} = Vy \text{ سرعت روی محور } y$$

$$\frac{dz}{dt} = Vz \text{ سرعت روی محور } z$$

لذا با توجه پارامترهای سرعت می توان با جایگزین نمودن $y' = \frac{Vy}{Vx}$ و $z' = \frac{Vz}{Vx}$ بطور مستقیم معادله

دیفرانسیل فوق را کاربری نمود.

$$3) f(x, y, z, y', z', c) = f(x, y, z', \frac{Vy}{Vx}, \frac{Vz}{Vx}, C)$$

چنانچه معادله کاربردی فوق را بخواهیم از طریق ماشینهای CNC و با دستگاه های کنترل از راه دور مورد

استفاده قرار دهیم می توانیم معادله سرعت زیر را لحاظ نمود.

$$4) V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2 + Vz^2}$$

$$0 < V \leq 300,000 \text{ km/sec}$$

سرعت در فضای (xyz) $V=(xyz)$

۲- معادلات جبری $f(x, y, z, c)$ مفروض است. برای کاربردی نمودن معادلات جبری فوق ، ابتدا بایستی

تصاویر معادله فوق را در سه صفحه (oxy) , (oxz) , (oyz) بدست آورد سپس y' را در صفحه

(oxy) و z' را در صفحه (oxz) و $\frac{z'}{y'}$ را در صفحه (oyz) بدست آورد و بعد از آن بجای $z' = \frac{Vz}{Vx}$ و

بجای $\frac{z'}{y'} = \frac{Vz}{Vy}$ قرار داد .

اینک برای کاربردی معادلات جبری فوق ابتداء تصویر سه صفحه را بدست می آوریم .

5) $f(x, y, 0, c) = 0$ $z = 0$ یعنی (oxy) تصویر معادله فوق در صفحه

6) $f(x, 0, z, c) = 0$ $y = 0$ یعنی (oxz) تصویر معادله فوق در صفحه

7) $f(0, y, z, c) = 0$ $x = 0$ یعنی (oyz) تصویر معادله فوق در صفحه

چنانچه در فرمول ۵ از y نسبت به x دیفرانسیل بگیریم $\frac{dy}{dx}$ پدیدار می شود .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Vy}{Vx}$$

چنانچه در فرمول ۶ از z نسبت به x دیفرانسیل بگیریم $\frac{dz}{dx}$ پدیدار می شود .

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz/dt}{dx/dt} = \frac{V_z}{V_x}$$

چنانچه در فرمول ۷ از z نسبت به y دیفرانسیل بگیریم $\frac{dz}{dy}$ پدیدار می شود .

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz/dt}{dy/dt} = \frac{V_z}{V_y}$$

با مشخصات شدن سرعتها در صفحات مختصات می توانیم رابطه ۴ را لحاظ نمود.

بنابراین با بررسی معادلات دیفرانسیل و معادلات جبری می توان معادلات یاد شده را کاربردی نمود .

با توجه به بررسی گزینه های (۲-) و (۱-) می توانیم فرمولهای ریاضی را که بصورت معادلات دیفرانسیل یا بصورت روابط جبری و بهر شکل دیگری ارائه می گردد را بصورت (ریاضی ، فیزیک ، مکانیک و ..) مورد بررسی قرار داد و با توجه به فرمول (۴) روابط یا معادلات و یا صورت مسائل را کاربردی نمود . لذا فرم مسائل ارائه شده جدید بصورت (ریاضی ، فیزیک ، مکانیک ، ...) ارائه می گردد .

متحرکی که روی هر نوع منحنی ریاضی دارای حرکت می باشد و مختصات متحرک بصورت فواصل (x,y,z) نشان داده شده باشد مختصات سرعت متحرک بصورت (Vx,Vy,Vz) نشان داده می شود . برای تفهیم فرمولهای فوق مثال در زیر آمده است.

اینک چنانچه متحرک فوق را (مبداء مختصات متحرک) در نظر بگیریم و دستگاه مختصات متحرک را S1 بنا کنیم و متحرک دیگری را در دستگاه مختصات S2 بنا کنیم می توان حرکت را مورد بررسی قرار داد. یعنی حرکت متحرک S2 نسبت به دستگاه مختصات S1 .

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را بصورت کاربردی نشان دهید .

$$x^2.y.dx + z.y^2.dy + z^2.x.dz = 0$$

حل: طرفین رابطه (dt) تقسیم می نمائیم.

$$x^2.y.\frac{dx}{dt} + z.y^2.\frac{dy}{dt} + z^2.x.\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dz}{dt} = V_z \end{cases}$$

$$x^2.y.V_x + z.y^2.V_y + z^2.x.V_z = 0$$

اینک با توجه به داشتن معادله کاربردی فوق و رابطه

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2 + Vz^2}$$

$$0 < V \leq 300,000 \text{ km/sec}$$

می توان روابط فوق را برای ماشینهای CNC و ماشینهای کنترل از راه دور تعریف نمود.

مثال ۲ : معادله سه بعدی زیر را بصورت کاربردی نشان دهید و سپس برای ماشینهای CNC و ماشینهای کنترل از راه دور تعریف نمائید .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ابتدا بایستی معادله فوق را در صفحه (oxy), (oxz), (oyz) تصویر نمائیم و سپس در هر صفحه معادله موجود در صفحه دیفرانسیل بگیریم تا سرعتهای مربوط در آن صفحه بدست آید و سپس با داشتن سه پارامتر سرعت و معادلات مربوط در صفحات ، می توان روابط مربوطه را برای ماشینهای CNC و ماشینهای کنترل از راه دور تعریف نمود .

نخست تصویر در صفحه (oxy) یعنی $Z=0$

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{0}{c^2} &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{2 \cdot x \cdot dx}{a^2} + \frac{2 \cdot y \cdot dy}{b^2} &= 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot y \cdot dy}{b^2} = \frac{-2 \cdot x \cdot dx}{a^2} \\ \frac{dy}{dx} + \frac{-b^2 \cdot x}{a^2 y} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Vy}{Vx} = \frac{-b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y} \Rightarrow Vy = \frac{-b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y} \cdot Vx\end{aligned}$$

حال تصویر در صفحه (oxz) یعنی $Y=0$

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{2 \cdot x \cdot dx}{a^2} + \frac{2 \cdot z \cdot dz}{c^2} &= 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot x \cdot dx}{a^2} = \frac{-2 \cdot z \cdot dz}{c^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{-c^2 \cdot x}{a^2 \cdot z} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} &= \frac{Vz}{Vx} = \frac{-c^2 \cdot x}{a^2 \cdot z} \Rightarrow Vz = \frac{-c^2 \cdot x}{a^2 \cdot z} \cdot Vx\end{aligned}$$

حال تصویر در صفحه (oyz) یعنی $X=0$

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \Rightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{2 \cdot y \cdot dy}{b^2} + \frac{2 \cdot z \cdot dz}{c^2} &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{-b^2 \cdot z}{a^2 \cdot y} \\ \frac{Vy}{Vz} &= \frac{-b^2 \cdot z}{c^2 \cdot y}\end{aligned}$$

حال با داشتن روابط فوق می توان نوشت :

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2 + Vz^2}$$

$$V = \sqrt{Vx^2 + \left(\frac{-b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y} \cdot Vx\right)^2 + \left(\frac{-c^2 \cdot x}{a^2 \cdot z} \cdot Vx\right)^2}$$

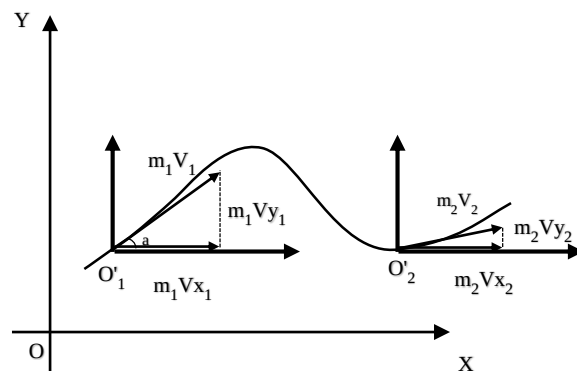
$$0 < V \leq 300,000 \text{ km/sec}$$

مقادیر a, b, c بایستی به صورت عددی برای ماشینهای CNC و ماشینهای کنترل از راه دور تعریف شود

در مثال (۲) برای مشخص نمودن سه پارامتر سرعت کافی است که تصویر معادله را در دو صفحه مشخص نمائیم. بدلیل آنکه در صفحه (oxy) دو پارامتر Vx, Vy مشخص و در صفحه (oxz) دو پارامتر Vx, Vz مشخص می شود. لذا الزامی ندارد در صفحه (oyz) پارامتر سرعت مشخص شود. زیرا در صفحه (oyz) دو پارامتر Vy, Vz مشخص شده است.

مبداء مختصات متحرک: در (فیزیک و مکانیک) هر جا بحث سرعت پیش آید، جرم نیز وابسته به آن می باشد. یعنی متحرکی که دارای سرعت می باشد آن متحرک دارای جرم نیز می باشد بطوریکه مقدار حرکت عبارت است از $(m \cdot v)$ حاصل ضرب جرم در سرعت متحرک.

در مبداء مختصات (oxy) متحرکی با جرم $m1$ و سرعت $V1$ روی هر نوع منحنی دارای حرکت می باشد (مطابق شکل ۱)



مقادیر $(m1.V1)$ روی دو محور مختصات x و y برابر است با $\tan \alpha = y'1 = \frac{m1.Vy1}{m1.Vx1} = \frac{Vy1}{Vx1}$

مختصات سرعتی $O'1$	$\begin{matrix} m1.Vy1 \\ m1.Vx1 \end{matrix}$
مختصات مسافتی $O'1$	$\begin{matrix} x1 \\ y1 \end{matrix}$

حال می توان مبداء مختصات جدید یا مبدا مختصات متحرک را نقطه $(O'1)$ در دستگاه یا سیستم $(S1)$ نامید. اینک می خواهیم متحرک $m2.V2$ را نسبت به $m1.V1$ بررسی نمائیم.

نقطه (O'2) مرکز دستگاه یا سیستم (S2) می باشد. ابتدا برای بدست آورد (y') در سیستم جدید (S2) نسبت به (S1) بایستی رابطه زیر را بنویسیم: (علامت + یا - بستگی به هم جهت حرکت تصاویر با در جهت مخالف + یا - دارد).

$$y'_{1,2} = \frac{m_1.Vy_1 - m_2.Vy_2}{m_1.Vx_1 - m_2.Vx_2}$$

چنانچه دو معادله دیفرانسیل $\begin{cases} f(x_1, y_1, y'_1, c_1) = 0 \\ f(x_2, y_2, y'_2, c_2) = 0 \end{cases}$ مفروض باشد و بخواهیم آن را کاربردی نمائیم و سپس حرکت دو متحرک در نقاط (O'1) و (O'2) را نسبت به هم بررسی نمائیم ، خواهیم داشت :

$$(X_{1,2}) = \text{طول یا فاصله متحرک } O'2 \text{ نسبت به متحرک } O'1 \quad \left| \begin{array}{l} m_2.Vx_2 \\ m_2.Vy_2 \end{array} \right| \text{ مختصات سرعتی } O'2$$

$$(Y_{1,2}) = \text{عرض یا فاصله متحرک } O'2 \text{ نسبت به متحرک } O'1 \quad \left| \begin{array}{l} .x_2 \\ .y_2 \end{array} \right| \text{ مختصات مسافتی } O'2$$

$$X_2 = x_{1,2} + x_1 = X_{1,2} + x_1 \Rightarrow X_{1,2} = X_2 - x_1$$

$$Y_2 = y_{1,2} + y_1 = Y_{1,2} + y_1 \Rightarrow Y_{1,2} = Y_2 - y_1$$

اینک با اثبات روابط مختصات مسافتی و مختصات سرعتی دو متحرک می توانیم دو معادله دیفرانسیل که در دستگاه یا سیستم (S1) و (S2) نوشته شده را نسبت بهم بررسی نمود . نکته قابل توجه این است که هر معادله دیفرانسیلی به تنهایی برای کاربردی نمودن وابستگی به جرم متحرک ندارد . ولی برای کاربردی نمودن دو معادله دیفرانسیل نسبت به هم به اجرام دو متحرک (m1) و (m2) بستگی دارد . حال با داشتن دو معادله

$$\text{دیفرانسیل و روابط } V_{1,2} \text{ و } y_{1,2} \text{ و } x_{1,2} \text{ و } y'_{1,2}$$

$$y'_{1,2} = \frac{m_1.Vy_1 - m_2.Vy_2}{m_1.Vx_1 - m_2.Vx_2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_1) f(x_1, y_1, y'_1, c_1) = f(x_1, y_1, \frac{Vy_1}{Vx_1}, c_1) = 0 \\ (S_2) f(x_2, y_2, y'_2, c_2) = f(x_2, y_2, \frac{Vy_2}{Vx_2}, c_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$(m) V_{1,2} = \sqrt{(m_1.Vx_1 - m_2.Vx_2)^2 + (m_1.Vy_1 - m_2.Vy_2)^2}$$

$$0 < V \leq 300,000 \text{ km/sec}$$

می توان با مشخص نمودن مقادیر (C1) و (C2) بصورت عددی برای ماشینهای CNC و ماشینهای کنترل از راه دور تعریف نمود . رابط فوق در صفحه (oxy) می باشد و چنانچه دو متحرک را در فضا بخواهیم

نسبت به هم کاربردی نمائیم و سپس بررسی نمائیم بایستی روابط فوق را در صفحات (oxz) و (oyz) مشخص نمائیم و سپس مقدار حرکت در فضا را برابر رابطه زیر نوشت :

$$(m) V_{1,2} = \sqrt{(m_1.Vx_1 - m_2.Vx_2)^2 + (m_1.Vy_1 - m_2.Vy_2)^2 + (m_1.Vz_1 - m_2.Vz_2)^2}$$
$$0 < V_{1,2} \leq 300,000 \text{ km/sec}$$

