

مثلثات نوری

می دانیم منبع نور در تمام جهات دارای اشعه می باشد و منتشر می شود. سرعت هر اشعه نور معادل ۳۰۰،۰۰۰ کیلومتر در ساعت می باشد. برای بررسی یک اشعه نور و یا تعداد بیشتر از یک نور، گزینه های زیر قابل محاسبه می باشد:

۱- انتشار یک اشعه نور در امتداد یکی از محورهاى مختصات (ox) , (oy) , (oz)

۲- تصاویر انتشار یک اشعه نور در صفحه محورهاى مختصات (oxy)

۳- تصاویر انتشار یک اشعه نور در فضای محورهاى مختصات $(oxyz)$

۱- انتشار یک اشعه نور در امتداد یکی از محورهاى مختصات (ox, oy, oz) : با توجه به ثابت بودن سرعت نور می توان نوشت:

$$\left. \begin{matrix} V_X = V_x \\ V_Y = V_y \\ V_Z = V_z \end{matrix} \right\} = 300,000 \text{ km/sec}$$

۲- تصاویر انتشار یک اشعه نور در صفحه محورهاى مختصات (oxy) : با توجه به ثابت بودن سرعت نور می توان نوشت:

$$V_X^2 + V_Y^2 = (300,000 \text{ km/sec})^2$$

۳- تصاویر انتشار یک اشعه نور در فضای محورهاى مختصات $(oxyz)$: با توجه به ثابت بودن سرعت نور می توان نوشت:

$$V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2 = (300,000 \text{ km/sec})^2$$

۲-۱- در صفحه مختصات (oxy) :

نظر به اینکه هر اشعه بصورت خطی و در امتداد $\sqrt{x^2 + y^2}$ منتشر می گردد بایستی فرمول سرعت انتشار نور نیز در امتداد $\sqrt{x^2 + y^2}$ محاسبه گردد. لذا در مبحث معادله سرعت سفینه در فضای $(oxyz)$ ، فرمول سرعت انتشار نور بصورت خطی محاسبه گردیده است. (در صفحه مختصات (oxy) و سپس فرمول سرعت انتشار نور را معادل ۳۰۰،۰۰۰ کیلومتر در ساعت قرار داد.

$$V_s = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 300,000 \text{ km/sec}$$

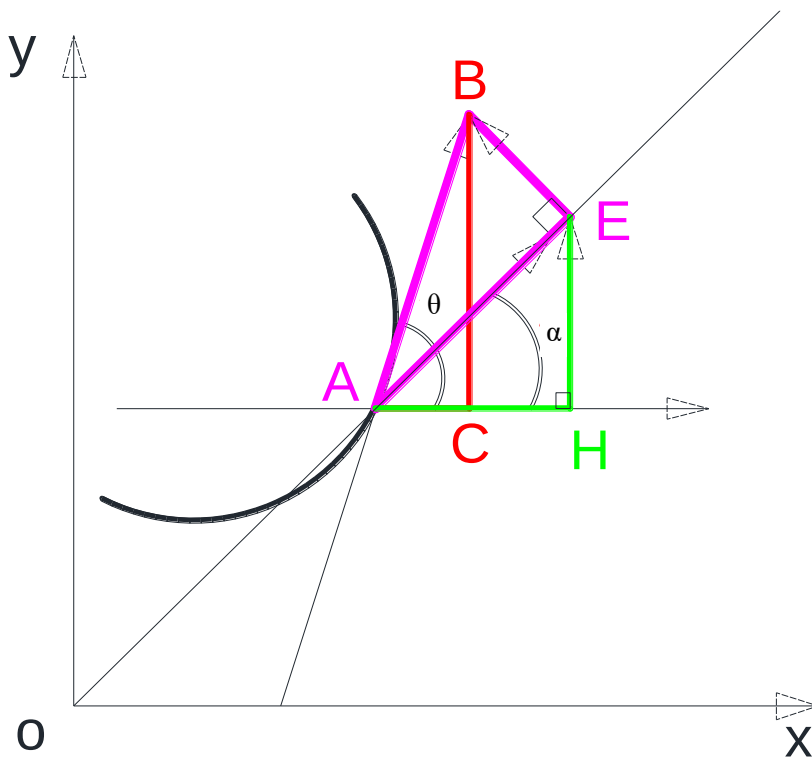
تصاویر V_s را بر روی دو محور مختصات (oxy) خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} V_X = V_s \cdot \cos \alpha \\ V_Y = V_s \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{V_Y}{V_X} = \frac{y}{x} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \\ \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \end{array} \right.$$

$$V_X = V_s \cdot \cos \alpha = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2}$$

$$V_Y = V_s \cdot \sin \alpha = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2}$$

$$V_s = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 300,000 \text{ km/sec}$$



$$\triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} \overline{AC} = V_x \\ \overline{CB} = V_y \end{cases}$$

$$\triangle AEH \Rightarrow \begin{cases} \overline{AH} = V_x \\ \overline{HE} = V_y \end{cases}$$

$$\triangle ABC \Rightarrow \frac{V_{CB}}{V_{AC}} = \frac{V_y}{V_x} = \tan \theta$$

$$\triangle AEH \Rightarrow \frac{\overline{HE}}{\overline{AH}} = \tan \alpha = \frac{Y}{X}$$

$$\triangle ABE \Rightarrow V_{AE} = V_{AB} \cdot \cos(\theta - \alpha)$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \theta + \sin \alpha \cdot \sin \theta$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{y/x}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{V_y^2}{V_x^2}}} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \frac{V_y/V_x}{\sqrt{1+\frac{V_y^2}{V_x^2}}} = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{V_x^2+V_y^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_{AB} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \\ V_{AE} = V_{AB} \cdot \cos(\theta - \alpha) \end{cases}$$

$$V_{AE} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \cdot \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$V_{AH} = V_x = V_{AE} \cdot \cos \alpha = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2}$$

$$V_{HE} = V_y = V_{AE} \cdot \sin \alpha = \frac{x \cdot V_x + y \cdot V_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2}$$

$$(OXY) \left\{ \overrightarrow{OA} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AE} \begin{vmatrix} V_x = \frac{x(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{(x^2 + y^2)} \\ V_y = \frac{y(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{(x^2 + y^2)} \end{vmatrix} \right\}$$

$$(OXZ) \left\{ \begin{vmatrix} x \\ z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} V_x = \frac{x(x \cdot V_x + z \cdot V_z)}{(x^2 + z^2)} \\ V_z = \frac{z(x \cdot V_x + z \cdot V_z)}{(x^2 + z^2)} \end{vmatrix} \right\}$$

$$(OXYZ) \Rightarrow V_T = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$0 < V_T \leq 300.000 \text{ km/sec}$$

۳-۱- در فضای مختصات (xyz): در فضای سه بعدی (xyz) سرعت (Vs) برابر (300,000 km/sec) خواهد بود و دارای ۳ تصویر بر روی محورهای مختصات (OX, OY, OZ) خواهد داشت.

$$V_s = 300,00 \text{ km/sec}$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{x(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2} \\ V_y &= \frac{y(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2} \\ V_z &= \frac{z(x \cdot V_x + z \cdot V_z)}{x^2 + z^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_s = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 300,00 \text{ km/sec}$$

لذا با ثبات موارد بالا، اساس روابط اولیه در مثلثات نوری خواهیم داشت :

$$(oxy) \begin{cases} \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \tan \alpha = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$(oxz) \begin{cases} \sin \beta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \\ \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \\ \tan \beta = \frac{z}{x} \end{cases}$$

$$(oyz) \begin{cases} \sin \gamma = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \tan \gamma = \frac{z}{y} \end{cases}$$

با توجه به اثبات روابط اولیه در مثلثات نوری، می توان ارتباط مثلثات محدبه را با مثلثات نوری اثبات نمائیم: در مثلثات محدبه روابط (x, y, z) براساس رابطه زیر تعریف می شود:

$$\left(\frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} \right) \quad (3-1)$$

مثلثات محدبه براساس روابط بین (x, y, z) بر روی سطح کره یا سطح هر منحنی در فضا تعریف می شود. تصاویر هر نقطه بر روی هر منحنی در فضا دارای ۳ تصویر در ۳ صفحه مبداء مختصات تعریف می گردد. در صفحه $\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \alpha$ (oxy) و در صفحه $\Rightarrow \frac{z}{x} = \tan \beta$ (oxz) و در صفحه $\Rightarrow \frac{z}{y} = \tan \gamma$ (oyz) را خواهیم داشت و براساس ۳ رابطه فوق، رابطه (۳-۱) تعریف می گردد:

$$\frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow (\tan \beta = \tan \gamma \cdot \tan \alpha) \quad (3-2)$$

اینک می توان رابطه (۳-۲) را با روابط اولیه مثلثات نوری لحاظ داشت.

حال با اثبات روابط مثلثات نوری با مثلثات محدبه ، اینک می پردازیم به اثبات مثلثات دینامیک با مثلثات نوری و مثلثات محدبه.

در مثلثات دینامیک روابط بین (V_x, V_y, V_z) براساس رابطه زیر تعریف می شود:

$$\left(\frac{V_z}{V_x} = \frac{V_z}{V_y} \right) \quad (4-1)$$

$$(oxy) \Rightarrow \frac{V_y}{V_x} = \tan \theta_{xy}$$

$$(oxz) \Rightarrow \frac{V_z}{V_x} = \tan \theta_{xz}$$

$$(oyz) \Rightarrow \frac{V_z}{V_y} = \tan \theta_{yz}$$

اثبات روابط فوق را می توان در سایت (www.p3m.ir) تحت عنوان « مثلثات دینامیک » مشاهده نمائید .

با توجه به اثبات روابط فوق در مثلثات چند گانه ، مشاهده می گردد مثلثات نوری به عنوان مثلثات مبنا یا مثلثات پایه در جهان علم فیزیک، مکانیک ، ریاضیات مدرن قابل محاسبه می باشد.

نتیجه :

در علم فیزیک، مکانیک ، ریاضیات (P3M) چند نوع مثلثات داریم :

- ۱- مثلثات اقلیدسی (فیثاغورث): $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- ۲- مثلثات محدبه: $\tan \beta = \tan \gamma \cdot \tan \alpha$
- ۳- مثلثات دینامیک: $\tan \theta_{xz} = \tan \theta_{yz} \cdot \tan \theta_{xy}$
- ۴- مثلثات نوری:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{x(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2} \\ V_y &= \frac{y(x \cdot V_x + y \cdot V_y)}{x^2 + y^2} \\ V_z &= \frac{z(x \cdot V_x + z \cdot V_z)}{x^2 + z^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_s = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 300,00 \text{ km/sec}$$

$$\text{مهد} = \text{انیشین} + \text{نیوتن} + \text{فیثاغورث}$$

$$\text{فیزیک مدرن} = \text{فیزیک نسبیت} + \text{فیزیک کلاسیک} + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1)$$

روابط فوق بصورت کلی و سرفصل اثبات شده است. چنانچه لازم باشد مسائل زیادی قابل محاسبه خواهد بود ، مثل مثلثات اقلیدسی

(فیثاغورث) که اساس آن بر رابطه $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$ استوار می باشد و در جهان علم کاربردهای زیادی دارد.