کاربردی نمودن معادلات ریاضی

کاربردی نمودن معادلات ریاضی در صفحه ۳۰۷۲ شماره ۹ سری نهم مجله Journal of Advances in Mathematics و سایت www.p3m.ir برای کاربردی نمودن معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در فضای (oxyz) چاپ شده است.

برای کاربردی نمودن معادلات ریاضی می توان محور متغیر (x) را با محور زمان (T) مساوی قرار دهیم. یعنی (x=T) با مساوی قراردادن محور متغیر (x) با محور زمان (T) معادله ریاضی تبدیل به معادله حرکتی می شود. با تساوی رابطه فوق می توان نتیجه گرفت که تمامی مختصات معادله ریاضی $f(x, y, z, c1) = 0$ برابر تمامی مختصات معادله حرکتی $f(t, y, z, c1) = 0$ خواهد بود.

مثال ۱ : معادله ریاضی روبرو را کاربردی نمایید و معادلات سرعت (Vx, Vy, , Vz) برروی سه محور مختصات مشخص نمایید.

$$x.y^2+x.z^3+y^3.z+c_1=0$$

برای کاربردی نمودن معادله ریاضی فوق کافیست (x=T) قرار دهیم یعنی

$$t.y^2+t.z^3+y^3.z+c_1=0$$

$$x=t \Rightarrow dx=dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 = Vx$$

اینک برای محاسبه (Vx, Vy, , Vz) به روش زیر عمل نماییم

ابتدا برای محاسبه (Vx) از طرفین رابطه (x=t) دیفرانسیل می گیریم یعنی dx=dt

سپس طرفین رابطه را بر (dt) تقسیم نماییم یعنی ($\frac{dx}{dt} = 1$) این رابطه همان معادله سرعت ثابت روی محور (x) می باشد یعنی (Vx=1)

حال برای محاسبه (Vy, Vz) کافیست از معادله حرکتی (دینامیکی) فوق (z) از (y) نسبت به (T) دیفرانسیل بگیریم یعنی

$$2.t.y.dy+y^2.dt+z^3dt+3.z^2.t.dz+3.y^2.zdy+y^3.dz=0$$

رابطه فوق را بر (dt) تقسیم می نماییم :

$$2.t.y.\frac{dy}{dt} +y^2+z^3+3z^2.t.\frac{dz}{dt}+3.y^2.z.\frac{dy}{dt} +y^3.\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = Vy \quad , \quad \frac{dz}{dt} = Vz$$

$$2.t.y.Vy+y^2+z^3+3z^2.t.Vz +3.y^2.z.Vy +y^3.Vz = 0$$

$$Vt=\sqrt{Vx^2 + Vy^2 + Vz^2} = \sqrt{1 + V^2y + V^2z}$$

$$0 < Vt \leq 300{,}000 \text{ Km/Sec}$$

رابطه بدست آمده همان رابطه کاربردی نمودن معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در فضای (oxyz) می باشد که درمجله Journal of Advances in Mathematics شماره ۹ سری ۹ صفحه ۳۰۷۲ چاپ شده است .

تنها تفاوت رابطه فوق با رابطه معادلات دیفرانسیل این می باشد که $Vx=1$ می باشد و چنانچه متحرک یا سفینه بر روی محور (x) به جای عدد ثابت (Vx) برابر (c) عدد ثابت ($Vx=1$) سرعت داشته باشد خواهیم داشت :

$$Vt=\sqrt{c^2+c^2.V^2y+c.V^2z}=c.\sqrt{(1+V^2y+V^2z)}$$

$$\mathbf{0<Vt\leq 300{,}000\ Km/Sec}$$

اثبات :

$$\left.\begin{aligned} y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{Vy}{Vx}=\frac{Vy}{1}=\frac{c.Vy}{c}\\ z'=\frac{dz}{dx}=\frac{dz/dt}{dx/dt}=\frac{Vz}{Vx}=\frac{Vz}{1}=\frac{c.Vz}{c}\end{aligned}\right\}=0$$

دیمانسیون های (Vx,Vy,Vz) بستگی به دیمانسیون (x,y,z,t) دارد. چنانچه دیمانسیون مسافت ها سانتی متر باشد و دیمانسیون (t) زمان ثانیه باشد در این صورت دیمانسیون سرعت ها (cm/sec) خواهد بود و اگر دیمانسیون مسافت ها متر باشد و دیمانسیون (t) زمان ثانیه باشد (m/sec) خواهد بود.

نکته خیلی مهم : در کاربردی نمودن معادلات ریاضی دقت زیاد شود که در معادلات ریاضی ... وجود دارد.

الف : منحنی های باز

ب : منحنی های بسته

الف : کاربردی نمودن معادلات ریاضی در قسمت منحنی باز همان مثال فوق می باشد که ذکر شده است

ب : درمعادلات ریاضی دقت شود معادله ریاضی از نوع منحنی بسته نباشد . زیرا در منحنی های بسته صادق نمی باشد مثل منحنی دایره . بیضی کره حرکت های رفت و برگشتی نوسانات و .... .

مجددا یاد آوری می شود در معادلات ریاضی که به صورت منحنی بسته می باشد تحت هیچ شرایطی استفاده نشود که جواب ندارد و صحیح نمی باشد. درادامه با ذکر مثال مفهوم کلیات مشخص خواهد شد.

مثال : معادله ریاضی روبرو معادله دایره می باشد $(x^2 + y^2 = R^2)$ و از نوع منحنی بسته می باشد و لذا نمی توان این معادله را به صورت $(x=t)$ کاربردی نمود.

برهان: چنانچه متحرکی بر روی دایره فوق با سرعت ثابت خطی حرکت نماید تصاویر آن بر روی دو محور (ox) و (oy) ثابت نخواهد بود و به صورت رفت و برگشت بر روی دو محور می باشد. $(x=R.\ \sin Wt)$

بنابراین در منحنی های بسته همیشه تصاویر متحرک به صورت رفت و برگشت می باشد و سرعت متغیر می باشد نه ثابت بنابراین به هیچ عنوان نمی توان از شرایط (الف) در قسمت (ب) استفاده نمود و قابل قبول نمی باشد.

الف : منحنی های باز: معادلات ریاضی که از نوع منحنی باز می باشد را می توان به سه دسته تقسیم نمود.

الف -۱ : دسته اول شامل معادلاتی می گردد که $(\frac{dx}{dt} = Vx = 1)$, $(y' = \frac{dy}{dt} = Vy)$, $(z' = \frac{dz}{dt} = Vy)$.

باشد. در این دسته تمامی مختصات معادله ریاضی با تمامی مختصات معادله دینامیکی برابر و یکسان خواهد بود.

الف-۲ : دسته دوم شامل معادلاتی می گردد که سرعت روی محور (ox) $Vx=c1$ برابر سرعت ثابت $(c1)$ باشد. در این صورت سرعت روی محور (oy) برابر $(c.Vy)$ خواهد بود و سرعت روی محور (oz) برابر $(c.Vz)$ خواهد بود. لذا در این حالت مقایسه دو معادله ریاضی و دینامیکی در توان و درجه متغیرها برابر و یکسان خواهد بود ولی در ضرائب ثابت متفاوت خواهد بود.

لازم به ذکر است در دسته الف-۱ و الف-۲ تصویر سرعت متحرک روی محور (ox) ثابت می باشد.

الف-۳ : چنانچه تصویر سرعت متحرک روی محور (ox) ثابت نباشد و سرعت متغیر باشد و تابعی از پارامتر زمان باشد $Vx=f'(t)$ ، بایستی تصویر سرعت متحرک روی محورهای (oy) و (oz) به ترتیب $Vy.f'(t)$ و $Vz.f'(t)$ باشد. یعنی

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= Vy.f'(t)\\ \frac{dx}{dt} &= Vx = f'(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Vy.f'(t)}{f'(t)} = \frac{Vy}{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= Vz.f'(t)\\ \frac{dx}{dt} &= Vx = f'(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Vz.f'(t)}{f'(t)} = Vz$$

تفاوت دسته سوم (الف-۳) با دو گروه (الف-۱ و الف-۲) این است که در دسته سوم (الف-۳) سرعت برروی محور (ox) متغیر و تابع پارامتر (T) می باشد و در دو دسته (الف-۱و الف-۲) سرعت بر روی محور (ox)

ثابت می باشد و لذا در دو دسته اول (الف-۱و الف-۲) شتاب روی محور (ox) برابر صفر می باشد ولی در دسته سوم (الف-۳) شتاب بر روی محور (ox) برابر صفر نخواهدبود.

با ذکر مثال برای هر سه دسته مشخص خواهد شد.

مثال : معادله ریاضی زیر را بر اساس دسته های ((الف-۱و الف-۲ و الف-۳) کاربردی نمایید.

$$Y=A.x^3 + B.x^2 + c.x + D \Rightarrow x=t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Vx = 1$$

$$A1) \Rightarrow y=A.t^3 + B.t^2 + C.t + D$$

$$dy = 3A\,.\,t^2.dt + 2.B.t.dt + C \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3.A.t^2 + 2.B.t + C.t$$

$$\frac{dy}{dt} = Vy = 3.A.t^2 + 2.B.t + zc.t$$

در رابطه ریاضی فوق با رابطه دینامیکی مشاهده می گردد که هر دو معامله از نوع منحنی باز می باشد و در دسته (الف-۱) قرار دارد و تمامی مختصات دو معادله برابر و یکسان می باشد.

$$\begin{cases} Vx = 1 \\ Vy = 3.A.t^2 + 2.B.t + C.t \end{cases}$$

اینک معادله ریاضی فوق را بر اساس $Vx=c_1$و براساس دسته (الف-۲) کاربردی نمایید.

$$x = c_1.t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Vx = c_1$$

$$A2) \Rightarrow y=A.(c_1\,.t)^3 + B\,(c1.t)^2 + C(x1.t) + D$$

$$\frac{dy}{dt} = Vy = A.c^3{}_1.t^3 + B.c^2{}_1.t^2 + c.c_1.t + D.$$

در رابطه ریاضی فوق با رابطه دینامیکی مشاهده می گردد که در دسته (الف-۲) قرار دارد و در توان متغیرها برابر و یکسان می باشد ولی در ضرائب ثابت متفاوت خواهد بود.

اینک معادله ریاضی فوق را بر اساس $Vx=f'(t)\ ,\ Vy=f'(t)\ ,\ Vz=f'(t)$ یعنی دسته سوم (الف-۳) کاربردی می نماییم.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = A[f(t)]^3 + b[f(t)]^2 + C.\,[f(t)] + D \end{cases}$$

$$A3) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Vx = f'(t) \\ Vy\,.\ f'(t) \\ Vz.\ \ f'(t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow dy = 3.A.\,[f(t)]^2.f'(t).dt + 2.B.\,[f(t)]^2.f'(t).dt +$$

$$C.\,[f'(t)].dt$$

$$\frac{dy}{dt} = Vy = 3.A.\,[f(t)]^2.f'(t).dt + 2.B.\,[f(t)]^2.f'(t).dt + C.\,[f'(t)].dt$$

برای واضح شدن رابطه بین معادله ریاضی با رابطه دینامیکی یک مثال می زنیم. فرض مینماییم $f'(t)=t.$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{dx}{dt}=vx=f'(t)=t\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}t^2+c_2\\ Vy.f'(t)=Vy.t\\ Vz.f'(t)=Vz.t\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\frac{Vy}{Vx}=\frac{Vy.t}{Vx.t}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{dy}{dx}\\ \frac{Vz}{Vx}=\frac{Vz.t}{Vx.t}=\frac{dz/dt}{dx/dt}=\frac{dz}{dt}\end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt}=t\Rightarrow dx=t.dt\ \Rightarrow x=\frac{1}{2}.t^2+c_2\Rightarrow x=f(t)=\frac{1}{2}t^2+c_2$$

$$y=A\left[\frac{1}{2}t^2+c_2\right]^3+B\left[\frac{1}{2}t^2+c_2\right]^2+C\left[\frac{1}{2}t^2+c_2\right]+D$$

در این حالت در دسته (الف-۳) معادله فوق را کاربردی نمودیم و مشاهده می گردد در دسته (الف-۳) دارای سه خصوصیت است.

۱- محور (ox) دارای شتاب می باشد. $x=f(t)\Rightarrow\frac{dx}{dt}=f'(t)=t\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)=1$

۲- محور (ox) دارای سرعت خطی می باشد . $Vx=(t)$

۳- توان معادله دینامیکی در مقایسه با توان معادله ریاضی که تغییر کرده است و زیادتر شده است و ضرائب ثابت نیز تغییر کرده است.

$$y=\frac{x+A}{1+x^2}$$

$$\text{I.}\begin{cases}x=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\frac{dx}{dt}=Vx=1\\ y=\frac{t+a}{1+t^2}\Rightarrow dy=\frac{(1+t^2).dt-2.t(t+a).dt}{(1+t^2)^2}\\ dy/dt=Vy=\frac{(1+t^2)-2t.(t+a)}{(1+t^2)^2}\end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases}x=c.t\Rightarrow dx=c.dt\Rightarrow\frac{dx}{dt}=c=Vx\\ y=\frac{c.t+a}{1+(c.t)^2}=\frac{c.t+a}{1+c^2.t^2}\\ dy=\frac{c.(1+c^2.t^2).dt-2.c^2.t(c.t+a).dt}{(1+c^2.t^2)}\\ dy/dt=Vy=\frac{c(1+c^2.t^2)-2.c^2.t(c.t+a)}{(1+c^2.t^2)^2}\end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases} x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t).dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f'(t) \\ \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) = \gamma x \ \text{ Acceleration of the axis (ox)} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \gamma x \qquad\quad \text{Acceleration of the axis (oy)} \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} \frac{dy}{dt} = y' = Vy \\ \frac{dx}{dt} = Vx \end{matrix}\right\} \Rightarrow y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t).Vy}{f'(t).Vx} = \frac{Vy}{Vx} = Vy = Vx = 1 \\ y = \frac{f(t)+a}{1+[f(t)]^2} \\ \frac{dy}{dt} = Vy = \frac{f'(t).\{1+[f(t)]^2\}-[2.f'(t).f(t)].[f(t)+a]}{\{1+[f(t)]^2\}^2} \end{cases}$$

$$y^2.e^x + 2.y.e^{2.x} = c$$

$$\text{I.}\begin{cases} x = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Vx = 1 \\ y^2.e^t + 2.y.e^{2.t} = c \Rightarrow 2.y.dy.e^t + e^t.dt.y^2 + 2.dy.e^{2.t} + 4.y.e^{2.t}.dt = 0 \\ dy/dt = Vy = \frac{-e^t.y^2-4.y.e^{2.t}}{2.y.e^t+2.e^{2.t}} \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} x = c.t \Rightarrow dx = c.dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Vx = c \\ y^2.e^{c.t} + 2.y.e^{2.c.t} = c \Rightarrow 2.y.dy.e^{c.t} + e^{c.t}.dt.y^2 + 2.dy.e^{2.t} + 4.y.e^{2.c.t} + 4.y.e^{2.c.t}.dt = 0 \\ dy/dt = Vy = \frac{-e^{c.t}.y^2-4.y.e^{2.c.t}}{2.y.e^{c.t}+2.e^{2.c.t}} \end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases} x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t).dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) = \gamma x \\ d^2y/dt^2 = \gamma y \\ dy/dt = Vy = \frac{-e^{f(t)}.y^2-4.y.e^{2.f(t)}}{2.y.e^{f(t)}+2.e^{2.f(t)}}.f'(t) \end{cases}$$

$$2.x.y + x^2.y^2 - x^2 = c_1$$

I. $$\begin{cases} x = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Vx = 1 \\ 2.t.y + t^2.y^2 - t^2 = c_1 \Rightarrow 2.t.dy + 2.y.dt + 2.t^2.y.dy + 2.t.y^2.dt - 2.t.dt = 0 \\ dy/_{dt} = Vy = \frac{-2y-2t.y^2+2t}{2.t+2.t^2.y} \end{cases}$$

II. $$\begin{cases} x = c.t \Rightarrow dx = c.dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Vx = c \\ 2.c.t.y + (c.t)^2.y^2 - (c.t)^2 = c_1 \\ 2.c.t.dy + 2.c.y.dt + 2.c^2.dt.t.y^2 + 2.y.dy.(c.t)^2 - 2.c^2.t.dt = 0 \\ dy/_{dt} = Vy = \frac{-2.c.y-2c^2+2c^2.t}{2.c.t-2.y.c^2.t^2} \end{cases}$$

III. $$\begin{cases} x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t).dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f'(t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) = \gamma x \\ d^2y/_{dt^2} = \gamma y \\ 2.f(t).y + [f(t)]^2.y^2 - [f(t)] = c_1 \\ 2.f'(t).y.dt + 2.f(t).dy + 2.[f'(t)].[f(t)].y^2.dt + 2y.dy.[f(t)]^2 - 2.[f'(t)].[f(t)].dt = 0 \\ dy/_{dt} = Vy = \frac{-2.f'(t).y-2.[f'(t)].[f(t)].y^2+2.[f'(t)].[f(t)]}{2.f(t)+2.y.[f(t)]^2} \end{cases}$$